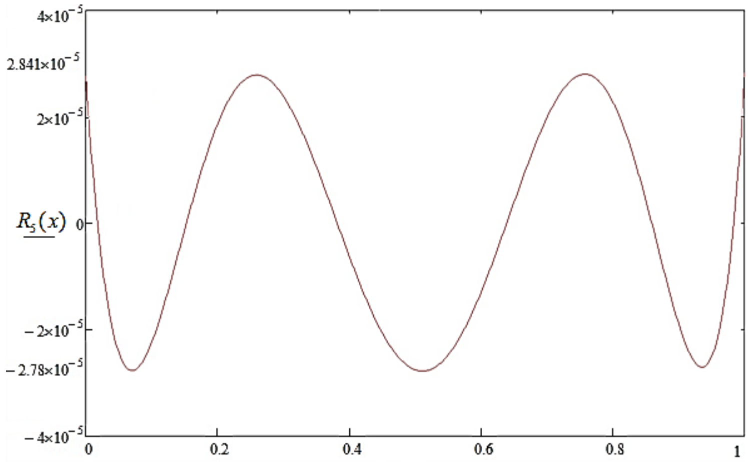
$$R_5(x) = -0.01772069838867811419 4x^5 + 0.26040124265396402267x^4 - 0.08131394324172399519 5x^3 -$$

$$-0.47924677924211918169x^2 - 1.0018643127151629211x + 0.99997609836337743214e^{\sin(x)} -$$

$$-0.99994847631186913823$$

Для того, щоб переконатися в справедливості умов теореми Чебишева [1;12] побудуємо графік $R_5(x)$:



Отже, ми знайшли таку систему точок, за допомогою якої можна побудувати інтерполяційно-апроксимаційний многочлен для будь якої гладкої функції на заданому відрізку.

ЛІТЕРАТУРА

1.Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512с.
2.Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632с.
3.Чебишев П.Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. Полн. собрание сочинений. – Изд. АНСССР, М. – Л., 1948.– Т.2. – С.23–51.

Кузьмінчук Т.
Науковий керівник – доц. Громяк М.І.

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

По теорії лінійних інтегро-диференціальних рівнянь побудований відповідний навчальний курс на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Т.Г. Шевченка. Побудова ж теорії для розв'язання слабко збурених інтегро-диференціальних систем була запропонована І.А.Бондар у роботі [1], яка детально описала методи розв'язання таких задач, та запропонувала їх практичне застосування. Але, оскільки, це є порівняно новий доробок математиків київської школи, то доцільно побудувати серію прикладів, що відображатимуть теорію розв'язання лінійних слабко збурених систем інтегро-диференціальних рівнянь, які у подальшому можуть бути використані у навчальній програмі студентів фізико-математичних факультетів класичних університетів.

Розглянемо слабко збурену лінійну неоднорідну систему інтегро- диференціальних рівнянь вигляду:

$$x'(t) - \Phi(t)\int_a^b \left[A(s)x(s) + B(s)x'(s)\right]ds = \qquad (1)$$

$$= f(t) + \varepsilon\int_a^b \left[K(t,s)x(s) + K_1(t,s)x'(s)\right]ds,$$

де $A(s)$, $B(s) - (m \times n) -$, $\Phi(t)\ -\ (n \times m) -, f(t)\ -\ (n \times 1)-, K(t,s),\ K_1(t,s)\ -\ (n \times n)$ — вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпчики матриці $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні на $[a,b]$.

Припускається, що породжуюча система, яку отримують з (1) при $\varepsilon\ =\ 0$

$$x'(t) - \Phi(t)\int_a^b \left[A(s)x(s) + B(s)x'(s)\right]ds = f(t) \qquad (2)$$

не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in L_2[a,b]$

Існування розв'язку слабкозбуреної інтегро-диференціальної системи (1) істотно залежить від $(d_1 \times r_1)$ - вимірної матриці

$$B_0 := P_{D_{d_1}}\left(\int_a^b \left[A(s)\int_a^s\int_a^b \left[K(\tau,s)X_{r_1}(s)+K_1(t,s)X'_{r_1}(s)\right]dsd\tau^{+}\right.\right.$$
$$\left.+B(s)\int_a^b\left[K(s,\tau)X_{r_1}(\tau)+K_1(s,\tau)X'_{r_1}(\tau)\right]dr\right]ds, \qquad (3)$$

яка побудована по коефіцієнтах системи (1) та $(m \times (m+n))$ –вимірної матриці:

$$D=\left[I_m-\int_a^b[A(s)\psi(s)+B(s)\Phi(s)]ds,-\int_a^b A(s)ds\right].$$

Теорема 1. *Нехай* $rank\ B_0 = n_2 < d_1$ *і система інтегро-диференціальних рівнянь (1) зі збуренням задовольняє вказаним вище умовам так, що породжуюча система (2) не розв'язна.*

Тоді, якщо виконується умова:

$$P_{B_0^*}P_{D_{d_1}^*}=0, \quad (4)$$

то система (1) має ρ-параметричну $(\rho = n+m-n_1-n_2)$ *сім'ю лінійно незалежних розв'язків у вигляді частини ряду Лорана:*

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k x_k(t,c_k), \quad (5)$$

$c_k \in \mathbb{R}^p, \forall t \in [a,b],$ *який збігається при фіксованому* $\varepsilon \in (0;\varepsilon_*]$.

Розв'язок слабкозбуреної інтегро-диференціальної системи (1) *визначений у наступному класі вектор-функцій:*

$x(t,\varepsilon)$: $x(*,\varepsilon)\in D_2[a,b], x'(*,\varepsilon)\in L_2[a,b], x(t,*)\in C[0,\varepsilon_0]$.

Приклад.

Розглянемо слабкозбурену систему інтегро – диференціальних рівнянь:

$$x'(t)-\Phi(t)\int_a^b\left[A(s)x(s)+B(s)x'(s)\right]ds= \qquad (1.1)$$
$$=f(t)+\varepsilon\int_a^b\left[K(t,s)x(s)+K_1(t,s)x'(s)\right]ds$$

$$t\in[-1,1],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$$

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}2t\\ t^3\end{pmatrix},\qquad A(t)=\begin{pmatrix}t^3 & -t\end{pmatrix},\qquad B(t)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}t & 1\end{pmatrix},$$

$$K(t)=\begin{pmatrix}0 & t\\ s & 0\end{pmatrix},\qquad K_1(t,s)=0.$$

Відомо, що при ε = 0 породжуюча відповідна система є нерозв'язною.

Розв'язок *x* системи шукаємо у наступному класі вектор-функцій:

$x=x(t,\varepsilon): x(*,\varepsilon)\in D_2[-1,1], x'(\cdot,\varepsilon)\in L_2[-1,1], x(t,\cdot)\in C(0,\varepsilon_0].$ Існування розв'язку системи (1.1) суттєво залежить від побудованих матриць *D* та B_0. Використовуючи теорію побудуємо відповідні матриці:

$$P_{D^*}=I_m-DD^+=I_1-\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=1-0=1,$$

$$D=[P_{11},P_{12}]$$

$$P_{11}=1-\int_{-1}^{1}[\begin{pmatrix} s^3 & -s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^2-1 \\ \frac{s^4-1}{4} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{3}{4}s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2s \\ s^3 \end{pmatrix}]ds=$$

$$=1-\int_{-1}^{1}(\frac{3}{4}s^5+\frac{3}{2}s^2+\frac{s}{4})\,ds=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=0,$$

$$P_{12}=-\int_a^b A(s)ds=-\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} s^3 & -s \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=0,$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad rankD=0.$$

Знайдемо псевдообернену за Муром-Пенроузом до D матрицю:

$$D^+=\lim_{\varepsilon\to\infty}D^*(DD^*+\varepsilon I_m)^{-1}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\varepsilon]^{-1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо P_D та P_{D^*} - матриці-ортопроектори, що проектують простори $\mathbb{R}^{n+m}$ та $\mathbb{R}^m$ на нуль-простори $N(D)$ *та* $N(D^*)$ і мають вимірність $((m+n)\times(m+n))$ *та* $(m\times m)$ відповідно.

$$P_D=I_{n+m}-D^+D=I_3-\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$rank\,P_D=3, \qquad r_1=m+n-n_1=1+2-0=3,$$

$$d_1=m-rankD=1-0=1,$$

$$rank\,P_{D^*}=1,$$

$$\psi_0(t)=\begin{pmatrix} t^2-1 & 1 & 0 \\ \frac{t^4-1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{D_3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_3(t)=\begin{pmatrix} t^2-1 & 1 & 0 \\ \frac{t^4-1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2-1 & 1 & 0 \\ \frac{t^4-1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо матрицю B_0

$$\int_{-1}^{1} K(t,s)X_{r_1}(s)\,ds = \int_{-1}^{1}\begin{pmatrix}0 & t\\ s & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} s^2-1 & 1 & 0\\ \dfrac{s^4-1}{4} & 0 & 1\end{pmatrix}ds = \begin{pmatrix}\dfrac{ts^4-t}{4} & 0 & 2t\\ s^3-s & s & 0\end{pmatrix},$$

$$\int_{-1}^{s}\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{5}t & 0 & 2t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix}\dfrac{1-s^2}{5} & 0 & s^2-1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A(s)\times\begin{pmatrix}\dfrac{1-s^2}{5} & 0 & s^2-1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s^3 & -s\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dfrac{1-s^2}{5} & 0 & s^2-1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\dfrac{s^3-s^5}{5} & 0 & s^5-s^3\end{pmatrix},$$

$$\int_{-1}^{1} K(s,t)X_{r_1}(t)\,dt = \begin{pmatrix}0 & s\\ t & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} t^2-1 & 1 & 0\\ \dfrac{t^4-1}{4} & 0 & 1\end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix}\dfrac{st^4-s}{4} & 0 & s\\ t^3-t & t & 0\end{pmatrix},$$

$$B(s)\times\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{5}s & 0 & 2s\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{3}{10}s^2 & 0 & \dfrac{3}{2}s^2\end{pmatrix},$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{s^3}{5}-\dfrac{s^5}{5} & 0 & s^5-s^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{10}s^2 & 0 & \dfrac{3s^2}{2}\end{pmatrix}\right]ds = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{5} & 0 & 1\end{pmatrix},$$

Отже, $B_0 = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{5} & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad rank\, B_0 = 1.$

Згідно теореми 1, щоб система (1.1) була розв'язною, достатньо, щоб виконувалася умова:

$$P_{B_0^*}\times P_{D_1^*} = 0 \tag{1.2}$$

$$P_{B_0^*} = I_m - B_0B_0^{+} = I_1 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Оскільки $rankB_0 = 1 \Rightarrow P_{B_0} = 0$, то умова (1.2) справедлива. Отже, згідно теореми 1, система (1.1) має 2-параметричну $(2 = 3 - 1 = r_1 - rankB_0)$ сім'ю розв'язків у вигляді частини ряду Лорана, який збігається при фіксованому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Головацька І.А. Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь : дис. кандидата фіз.- мат. Наук/ Головацька Іванна Анатоліївна. – К., 2014. – 127 с.