Біланик О.
Науковий керівник – доц. Кравчук В.Р.

НАБЛИЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦІЙ БЕССЕЛЯ ПЕРШОГО РОДУ

Функції Бесселя — це сімейство функцій, які є розв'язками лінійного диференціального рівняння другого порядку виду

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+\left(x^2-\nu^2\right)u=0. \qquad (1)$$

Таке рівняння називають рівнянням Бесселя, число ν — порядком рівняння Бесселя. Дане диференціальне рівняння було названо на честь німецького математика і астронома Фрідріха Вільгельма Бесселя, який детально досліджував його і показав (у 1824 році), що розв'язки рівняння виражаються через спеціальний клас функцій, що одержали назву циліндричних функцій або функцій Бесселя.

Добре розроблена теорія циліндричних функцій, наявність докладних таблиць їх значень та широка область застосування служать достатньою підставою для того, щоб віднести їх до числа найбільш важливих спеціальних функцій.

Загальним розв'язком лінійного диференціального рівняння другого порядку є лінійна комбінація двох його часткових розв'язків y_1 та y_2 за умови, що їх відношення $\frac{y_1}{y_2}$ не є сталою величиною.

Одним з таких часткових розв'язків рівняння (1) є функція Бесселя першого роду $J_\nu(x)$. Цю функцію можна задати у вигляді ряду:

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n},$$ де $\Gamma(n+\nu+1)$ — гама-функція.

Для наближення функції Бесселя $J_\nu(x)$, де $x\in[-h;h]$, $h>0$, $\nu\neq0$, уведемо допоміжну функцію $y=\varphi(x)$ таку, що $J_\nu(x)=x^\nu\varphi(x)$.

Побудуємо за A-методом многочлен $2n$-го степеня для наближення функції $y=\varphi(x)$, де $x\in[-h;h]$.

Теорема. Якщо $y_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{n}c_{2k}x^{2k}$ — многочлен, побудований за A-мето-дом для наближення функції $y=\varphi(x)$, $x\in[-h;h]$, то

$$c_{2k}=\tau\left((-1)^{n-k+1}(2n+3)\frac{(2k+1)!!}{(2k+1)!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n+2-i)!}{i!(2n+1-2i)!!}\prod_{m=i}^{n-k-1}(2n-2m+2\nu)\frac{2^{2n+2-2i}}{h^{2n+3-2i}}\right), \qquad (2)$$

де

$$\tau=2\nu\left((-1)^{n+1}(2n+3)\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(2n+2-i)!}{i!(2n+1-2i)!!}\prod_{m=i}^{n}(2n-2m+2\nu)\frac{2^{2n+2-2i}}{h^{2n+3-2i}}\right)^{-1}. \qquad (3)$$

Доведення. Функція $y=\varphi(x)$, $x\in[-h;h]$, є розв'язком задачі Коші

$$x\varphi''(x)+(2\nu+1)\varphi'(x)+x\varphi(x)=0,\ \ \varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=0. \qquad (4)$$

Справді, функція $u=J_\nu(x)=x^\nu\varphi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+\left(x^2-\nu^2\right)u=0.$$

Знайдемо похідні:

$$\frac{du}{dx}=J'_\nu(x)=\nu x^{\nu-1}\varphi(x)+x^\nu\varphi'(x);\ \ \frac{d^2u}{dx^2}=J''_\nu(x)=\nu(\nu-1)x^{\nu-2}\varphi(x)+2\nu x^{\nu-1}\varphi'(x)+x^\nu\varphi''(x).$$

Підставивши знайдені похідні у диференціальне рівняння, після спрощення одержимо:

$$x\varphi''(x)+(2\nu+1)\varphi'(x)+x\varphi(x)=0.$$ До того ж, $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=0$.

Отже, функція $y=\varphi(x)$ справді є розв'язком задачі Коші (4).

Замінімо задачу Коші еквівалентним їй інтегральним рівнянням Вольтерра. Врахувавши початкові умови, проінтегруємо рівняння (4) двічі по змінній t у межах від 0 до x. Матимемо шукане інтегральне рівняння:

$$x\varphi(x)=-(2\nu-1)\int_0^x\varphi(t)dtx-\int_0^x\int_0^z z\varphi(z)dzdt+2\nu x. \qquad (5)$$

Многочлен $y_{2n}(x)=c_0+c_2x^2+\ldots+c_{2n}x^{2n}$ шукатимемо, виходячи з інтегрального рівняння (5), а саме з рівняння:

$$x\left(c_0+c_2x^2+\ldots+c_{2n}x^{2n}\right)=-(2\nu-1)\int_0^x\left(c_0+c_2t^2+\ldots+c_{2n}t^{2n}\right)dt-$$

$$-\int_0^x\int_0^z z\left(c_0+c_2z^2+\ldots+c_{2n}z^{2n}\right)dzdt+2\nu x-\tau T_{2n+3}\left(\frac{x}{h}\right),$$

де τ — деяка стала, $T_{2n+3}(x)$ — многочлен Чебишова степеня $2n+3$. Із цього рівняння маємо:

$$c_0x+c_2x^3+\ldots+c_{2n}x^{2n+1}=-(2\nu-1)\left(c_0x+\frac{c_2x^3}{3}+\ldots+\frac{c_{2n}x^{2n+1}}{2n+1}\right)-$$

$$-\left(\frac{c_0x^3}{2\cdot3}+\frac{c_2x^5}{4\cdot5}+\ldots+\frac{c_{2n}x^{2n+3}}{(2n+2)(2n+3)}\right)+2\nu x-\tau\left(t_0+t_1\frac{x}{h}+\ldots+t_{2n+3}\left(\frac{x}{h}\right)^{2n+3}\right),$$

де t_{2i+1}, $i=\overline{0,n+1}$ — коефіцієнти многочлена Чебишова $T_{2n+3}(x)$.

Прирівнявши в рівнянні коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему $n+1$ рівнянь з $n+1$ невідомими $c_0, c_2, \ldots, c_{2n}$ і τ:

$$\begin{cases} c_0 = -(2v-1)c_0 - \tau\dfrac{t_1}{h} - 2v; \\ c_2 = -\dfrac{2v-1}{3}c_2 - \dfrac{c_0}{6} - \tau\dfrac{t_3}{h^3}; \\ c_4 = -\dfrac{2v-1}{5}c_4 - \dfrac{c_2}{20} - \tau\dfrac{t_5}{h^5}; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ c_{2n-2} = -\dfrac{2v-1}{2n-1}c_{2n-2} - \dfrac{c_{2n-4}}{(2n-2)(2n-1)} - \tau\dfrac{t_{2n-1}}{h^{2n-1}}; \\ c_{2n} = -\dfrac{2v-1}{2n+1}c_{2n} - \dfrac{c_{2n-2}}{2n(2n+1)} - \tau\dfrac{t_{2n+1}}{h^{2n+1}}; \\ 0 = -\dfrac{c_{2n}}{(2n+2)(2n+3)} - \tau\dfrac{t_{2n+3}}{h^{2n+3}}. \end{cases}$$

Перетворимо рівняння системи:

$$\begin{cases} 0 = -2vc_0 - \tau\dfrac{t_1}{h} + 2v; \\ c_0 = -6\left(\dfrac{2v-2}{3}c_2 + \tau\dfrac{t_3}{h^3}\right); \\ c_2 = -20\left(\dfrac{2v+4}{5}c_4 + \tau\dfrac{t_5}{h^5}\right); \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ c_{2n-4} = -(2n-2)(2n-1)\left(\dfrac{2v+2n-2}{2n-1}c_{2n-2} + \tau\dfrac{t_{2n-1}}{h^{2n-1}}\right); \\ c_{2n-2} = -2n(2n+1)\left(\dfrac{2v+2n}{2n+1}c_{2n} + \tau\dfrac{t_{2n+1}}{h^{2n+1}}\right); \\ c_{2n} = -\tau(2n+2)(2n+3)\dfrac{t_{2n+3}}{h^{2n+3}}. \end{cases}$$

В останньому рівнянні системи маємо c_{2n}. Підставляємо його значення в попереднє рівняння, знаходимо c_{2n-2} і послідовно у такий спосіб шукаємо всі коефіцієнти многочлена $y_{2n}(x)$:

$$c_{2n} = -\tau(2n+2)(2n+3)\frac{t_{2n+3}}{h^{2n+3}};$$

$$c_{2n-2} = -2n(2n+1)\left(\frac{2v+2n}{2n+1}\left(-\tau(2n+2)(2n+3)\frac{t_{2n+3}}{h^{2n+3}}\right) + \tau\frac{t_{2n+1}}{h^{2n+1}}\right) =$$

$$= \tau\left(2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)\frac{2v+2n}{2n+1}\frac{t_{2n+3}}{h^{2n+3}} - 2n(2n+1)\frac{t_{2n+1}}{h^{2n+1}}\right);$$

Покажемо, що $c_{2n-2j} = \tau\left(\dfrac{(2n-2j+1)!!}{(2n-2j+1)!}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j+i+1}\dfrac{(2n-2i+3)!}{(2n-2i+1)!!}\prod_{m=i}^{j-1}(2n-2m+2v)\dfrac{t_{2n-2i+3}}{h^{2n-2i+3}}\right)$. (6)

(Вважаємо, що $\prod_{m=j}^{j-1}(2n-2m+2v) = 1$.) Використовуючи метод математичної індукції, легко показати, що рівність (6) виконується для будь-якого $j = \overline{0, n}$. Нехай $2n - 2j = 2k$. Тоді $j = n - k$ і рівності (6) можна записати у вигляді

$$c_{2k} = \tau\left(\frac{(2k+1)!!}{(2k+1)!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^{n-k+i+1}\frac{(2n+3-2i)!}{(2n+1-2i)!!}\prod_{m=i}^{n-k-1}(2n-2m+2v)\frac{t_{2n+3-2i}}{h^{2n+3-2i}}\right). \quad (7)$$

Оскільки $T_{2n+3}(x) = (2n+3)\sum_{i=0}^{\left[\frac{2n+3}{2}\right]}\dfrac{(-1)^i(2n+2-i)!2^{2n+2-2i}}{i!(2n+3-2i)!}x^{2n+3-2i}$, то

$$t_{2n+3-2i}=(-1)^i(2n+3)\frac{(2n+2-i)!}{i!(2n+3-2i)!}2^{2n+2-2i}.$$

Підставивши значення $t_{2n+3-2i}$ у формули (6), одержимо:

$$c_{2k}=\tau\left((-1)^{n-k+1}(2n+3)\frac{(2k+1)!!}{(2k+1)!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n+2-i)!}{i!(2n+1-2i)!!}\prod_{m=i}^{n-k-1}(2n-2m+2v)\frac{2^{2n+2-2i}}{h^{2n+3-2i}}\right).$$

Одержали формули (1) для коефіцієнтів многочлена $y_{2n}(x)$.

Використовуючи формули (1), запишемо c_0:

$$c_0=\tau\left((-1)^{n-k+1}(2n+3)\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n+2-i)!}{i!(2n+1-2i)!!}\prod_{m=i}^{n-1}(2n-2m+2v)\frac{2^{2n+2-2i}}{h^{2n+3-2i}}\right).$$

Врахувавши рівності $0=-2vc_0-\tau\frac{t_1}{h}+2v$ та $t_1=(-1)^{n+1}(2n+3)$, матимемо:

$$\tau\left(2v(-1)^{n+1}(2n+3)\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n+2-i)!}{i!(2n+1-2i)!!}\prod_{m=i}^{n-1}(2n-2m+2v)\frac{2^{2n+2-2i}}{h^{2n+3-2i}}+\frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{h}\right)=2v,$$

$$\tau\left(2v(-1)^{n+1}(2n+3)\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(2n+2-i)!}{i!(2n+1-2i)!!}\prod_{m=i}^{n}(2n-2m+2v)\frac{2^{2n+2-2i}}{h^{2n+3-2i}}\right)=2v,$$

звідки

$$\tau=2v\left((-1)^{n+1}(2n+3)\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(2n+2-i)!}{i!(2n+1-2i)!!}\prod_{m=i}^{n}(2n-2m+2v)\frac{2^{2n+2-2i}}{h^{2n+3-2i}}\right)^{-1}.$$

Одержали формулу (2) для τ. Отже, коефіцієнти многочлена $y_{2n}(x)$ і τ справді шукаються відповідно за формулами (2) і (3).

Теорема доведена.

Приклад. Розглянемо функцію Бесселя першого роду порядку 1

$$J_1(x)=x\varphi(x),\ x\in[-1;1].$$

Побудувавши за *А*-методом многочлен четвертого степеня для наближення функції $\varphi(x)$, одержимо:

$$y_4(x)=\frac{1068704}{1068711}-\frac{133504}{1068711}x^2+\frac{5376}{1068711}x^4.$$

Для наближення функції $J_1(x)=x\varphi(x),\ x\in[-1;1]$, маємо многочлен

$$P_5(x)=\frac{1068704}{1068711}x-\frac{133504}{1068711}x^3+\frac{5376}{1068711}x^5.$$

Для оцінки модуля різниці $|J_1(x)-P_5(x)|$ обчислені значення модуля цієї різниці в точках проміжку [–1; 1] з кроком 0,1. Найгірше відхилення дорівнює 0,000002059.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть I. — М.: ИЛ, 1949. — 800 с.
2. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Київ: Наук. думка, 1988. — 304 с.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию рівномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
4. Дзядык В. К. Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций e^x, sin*x* и др. //Укр. мат. журн. — 1973. — 25. №5 — с. 435–453.
5. Кафтанова Ю. В Специальные функции математической физики. Научнопопулярное издание. — Х.: ЧП Издательство «Новое слово», 2009. — 596 с.
6. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980. — 610 с.

Юськів В.

Науковий керівник — доц. Балик Н.Р.

РОЗРОБКА ВЛАСНОЇ ІНТЕРАКТИВНОЇ КАРТИ З ВИКОРИСТАННЯМ API ЯНДЕКС.КАРТИ 2.0 ДЛЯ ІНТЕРНЕТ-САЙТУ «ЗРОБИ МІСТО КРАЩИМ!»

Постановка проблеми. Сучасний Інтернет простір стрімко розвивається, створюються нові і багатофункціональні сайти та Інтернет-портали. Одним із критеріїв функціонування і подальшого використання Інтернет-сайту є ефективність сайту.

Однією з технологій, що дає можливість зробити Інтернет-сайт ефективним, є використання API Яндекс.Карти. Використання карт дозволяє утримувати користувача на ресурсі, не дає йому піти з сайту для того,