де інфімум шукається по всіх лінійних неперервних операторах, які діють з X у деякий лінійний підпростір L_m простору X, розмірності не більшої ніж m, і по всіх таких лінійних підпросторах L_m.

Отримано наступну теорему.

Теорема. *Нехай* , $\Omega(t) = \omega(t_1 \dots t_d)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$. *Тоді при* $\theta \in (q, \infty)$ *має місце наступна оцінка*

$$\frac{\sqrt{\log\log n}}{\log n}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}\, \omega(2^{-n})2^{-n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll \lambda_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \ll \omega(2^{-n})2^{-n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}$$

,

де $M \asymp 2^n n^{(d-1)}$.

Доведення. Оцінка зверху проводиться з використанням методу дискретизації, який запропонував Галеев Е.М. [4]. Оцінка знизу встановлюється також методом дискретизації з використанням результатів Ізаака А.Д. [5].

Зауваження. Порядкова оцінка лінійних поперечників класів $B^r_{p,\theta}$ у випадку $1 < p \leq 2$, $p' < q < \infty$, $\theta \in (q, \infty)$

встановлена Романюком А.С. [6].

ЛІТЕРАТУРА:

1. Бари Н. К, Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва.– 1956.– 5–С.483–522.
2. Sun Yongsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та АН СССР.– 1997.– 219.– P. 356– 377.
3. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, №3. – С. 81 – 120.
4. Галеев Э. М. О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вестник МГУ, Сер. 1, Матем., Мех.– 1987.– 4.– С.–13–16.
5. Изаак А. Д. Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Матем. заметки.– 1994.– 55, №1.– С. 43– 52.
6. Романюк А. С. К вопросу о линейных поперечниках классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2014. – **7**.

Зорик М.

Науковий курівник — доц. Кравчук В.Р.

НАБЛИЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ З ОСОБЛИВОСТЯМИ НА ДОВІЛЬНОМУ ПРОМІЖКУ

Майже в усіх галузях прикладної математики важливу роль відіграють задачі апроксимації «більш складних» функцій «менш складними». Такі задачі виникають при обробці експериментальних даних, чисельному диференціюванні та інтегруванні тощо. Тому важливо знати основні методи, результати і задачі теорії наближення функцій.

Найбільш простими апаратами наближення функцій є множина многочленів і множина раціональних функцій. У використанні на практиці дуже зручними є многочлени. Щоб утворити многочлен досить задати тільки скінченну кількість його коефіцієнтів. Значення многочлена просто обчислюються, його легко продиференціювати, проінтегрувати.

Якщо здійснюють наближення деякої функції многочленами чи раціональними функціями і при цьому виходять лише із властивостей даної функції, то кажуть, що здійснюють апроксимацію даної функції. При інтерполяції функції використовують її значення в деяких точках проміжку, на якому здійснюють наближення.

Існують різні методи апроксимації функцій многочленами, кожний з яких забезпечує певну «точність» наближення.

Наближення функцій можна здійснювати за допомогою частинних сум n-го порядку ряду Тейлора цих функцій, які отримуються з ряду Тейлора, якщо в ньому відкинути всі члени починаючи з деякого. Таких частинних сум достатньо для розв'язання багатьох задач з аналізу, геометрії та механіки, зокрема тих, де необхідне локальне наближення функції, тобто її наближення в малому околі деякої точки. Проте у задачах, де потрібно наближати функцію на деякій фіксованій множині точок (зокрема, на відрізку), частинні суми n-го порядку ряду Тейлора є не найкращими для наближення.

У роботі при наближенні функцій многочленами використано А-метод, розроблений В. К. Дзядиком [1].

Побудуємо за А-методом многочлен n-го степеня для наближення функції $y = \ln(1 + t)$,

$t \in [\, t_0 - h;\ t_0 + h\,]$, де $h > 0$, $t_0 > h - 1$. Зробивши заміну $t = hx + t_0$, отримаємо функцію

$y = \ln(1 + t_0 + hx)$, $x \in [-1;1]$.

Теорема. Для будь-якого $n \in Z^+$ алгебраїчний многочлен

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \tag{1}$$

де

$$c_k = \left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^k \frac{\tau(n+1)}{k} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{(-1)^{n+1-i}(1+t_0)^{n-2i}(n-i)!2^{n-2i}}{i!(n-2i)!h^{n+1-2i}}, \quad k = 1, \ldots n, \tag{2}$$

$$c_0 = (1+t_0)^{-1}\left((1+t_0)\ln(1+t_0) - \tau t_0\right), \tag{3}$$

$$\tau = \left(-(n+1)\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{n+1-i}(1+t_0)^{n-2i}(n-i)!2^{n-2i}}{i!(n-2i)!h^{n+1-2i}} + \frac{t_1}{h}\right)^{-1}, \tag{4}$$

має ту властивість, що для всіх $x \in [-1;\, 1]$ виконується рівність

$$y(x) - y_n(x) = \frac{\tau}{1+t_0+hx}\left(T_{n+1}(x) - h(1+t_0+hx)\int_0^x \frac{T_{n+1}(t)\,dt}{(1+t_0+hx)^2}\right), \tag{5}$$

де $T_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} t_i x^i$ — многочлен Чебишова степеня $n + 1$.

Доведення. Функція $y(x) = \ln(1 + t_0 + hx)$, $x \in [-1;1]$, є розв’язком задачі Коші

$$(1+t_0+hx)\,y'(x)=h,\ y(0)=\ln(1+t_0). \qquad (6)$$

Справді $y'(x)=\dfrac{h}{1+t_0+hx}$, тому $(1+t_0+hx)\,y'(x)=h,$ до того ж $y(0) = \ln(1 + t_0 + 0\cdot h) = \ln(1 + t_0)$.

Замінимо задачу Коші еквівалентним їй інтегральним рівнянням Воль-терра. Врахувавши початкову умову, проінтегруємо рівняння $(1+t_0+ht)\,y'(t)=h,$ по змінній t у межах від 0 до x:

$$\int_0^x \left(1+t_0+ht\right)y'(t)dt=\int_0^x hdt;$$

$$\int_0^x \left(1+t_0+ht\right)y'(t)dt=\begin{vmatrix} u=1+t_0+ht & dv=y'(t)dt \\ du=hdt & v=y(t)\end{vmatrix}=$$

$$=\left(1+t_0+ht\right)y(t)\Big|_0^x-h\int_0^x y(t)dt=\left(1+t_0+hx\right)y(x)-$$

$$-(1+t_0)\ln(1+t_0)-h\int_0^x y(t)dt=hx;$$

$$(1+t_0+hx)\,y(x)-(1+t_0)\ln(1+t_0)-h\int_0^x y(t)dt=hx.$$

Маємо інтегральне рівняння

$$(1+t_0+hx)\,y(x)=h\int_0^x y(t)dt+hx+a, \qquad (7)$$

де $a = (1 + t_0)\ln(1 + t_0)$.

Функцію $y(x) = \ln(1 + t_0 + hx)$, $x \in [-1;1]$, будемо наближати многочленом

$$y_n\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i,$$

який є розв’язком рівняння

$$(1+t_0+hx)\,y_n(x)=h\int_0^x y_n(t)dt+hx+a-\tau T_{n+1}\left(x\right), \qquad (8)$$

де τ — деяка стала. Із цього рівняння маємо:

$$(1+t_0+hx)\sum_{i=0}^{n}c_ix^i=h\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{x^{i+1}}{i+1}+hx+a-\tau\sum_{i=0}^{n+1}t_ix^i. \qquad (9)$$

Прирівнявши в (9) коєфіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему $n+2$ рівнянь з $n+2$ невідомими c_0, c_1, c_2, ..., c_n і τ :

$$\begin{cases} (1+t_0)c_0 = a - \tau \cdot t_0; \\ hc_0 + (1+t_0)c_1 = hc_0 + h - \tau \cdot t_1; \\ hc_1 + (1+t_0)c_2 = h\dfrac{c_1}{2} - \tau \cdot t_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ hc_{n-1} + (1+t_0)c_n = h\dfrac{c_{n-1}}{n} - \tau \cdot t_n; \\ hc_n = h\dfrac{c_n}{n+1} - \tau t_{n+1}. \end{cases} \qquad (10)$$

З останнього рівняння системи знаходимо c_n, потім підставляємо його значення в попереднє рівняння і послідовно в такий спосіб шукаємо всі c_i.

Матимемо:

$$hc_n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\tau t_{n+1};$$

$$c_n = -\frac{n+1}{hn}\tau t_{n+1};$$

$$hc_{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1+t_0\right)\frac{n+1}{hn}\tau t_{n+1} - \tau t_n;$$

$$c_{n-1} = \left(\left(1+t_0\right)\frac{n+1}{h^2\left(n-1\right)}t_{n+1} - \frac{n}{h\left(n-1\right)}t_n\right)\tau;$$

$$c_{n-2} = \left(-\left(1+t_0\right)^2\frac{\left(n-1\right)n\left(n+1\right)}{h^3\left(n-1\right)\left(n-2\right)n}t_{n+1} + \left(1+t_0\right)\frac{n\left(n-1\right)}{h^2\left(n-1\right)\left(n-2\right)}t_n - \frac{n-1}{h\left(n-2\right)}t_{n-1}\right)\tau =$$

$$= \left(-\left(1+t_0\right)^2\frac{\left(n+1\right)}{h^3\left(n-2\right)}t_{n+1} + \left(1+t_0\right)\frac{n}{h^2\left(n-2\right)}t_n - \frac{n-1}{h\left(n-2\right)}t_{n-1}\right)\tau;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{n-j} = \left(\left(-1\right)^{j+1}\left(1+t_0\right)^j\frac{\left(n+1\right)}{h^{j+1}\left(n-j\right)}t_{n+1} + \left(-1\right)^j\left(1+t_0\right)^{j-1}\frac{n-j}{h^j(n-j)}t_{n-j} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \left(1+t_0\right)\frac{n-j+2}{h^2\left(n-j\right)}t_{n-j+2} - \frac{n-j+1}{h\left(n-j\right)}t_{n-j+1}\right)\tau,$$

або

$$c_{n-j}=\left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^{n-j}\frac{\tau}{n-j}\sum_{k=n+1-j}^{n+1}k\left(-1\right)^k\left(1+t_0\right)^{k-1}h^{-k}t_k. \qquad (11)$$

Використовуючи метод математичної індукції, покажемо, що рівність (11) виконується для будь-якого $j=\overline{1,n}$.

Перевіримо правильність даної рівності при $j = 1$:

$$c_{n-1}=\left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^{n-1}\frac{\tau}{n-1}\sum_{k=n}^{n+1}k\left(-1\right)^k\left(1+t_0\right)^{k-1}h^{-k}t_k=$$

$$=\left(\left(1+t_0\right)\frac{n+1}{h^2\left(n-1\right)}t_{n+1}-\frac{n}{h\left(n-1\right)}t_n\right)\tau.$$

При $j = 1$ рівність є правильною.

Припустимо, що рівність (11) є правильною при $j = m$, де $m < n$, тобто що

$$c_{n-m}=\left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^{n-m}\frac{\tau}{n-m}\sum_{k=n-m+1}^{n+1}k\left(-1\right)^k\left(1+t_0\right)^{k-1}h^{-k}t_k.$$

Доведемо, що рівність правильна при $j = m + 1$:

$$c_{n-m-1}=\left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^{n-m-1}\frac{\tau}{n-m-1}\sum_{k=n-m}^{n+1}k\left(-1\right)^k\left(1+t_0\right)^{k-1}h^{-k}t_k.$$

Оскільки $hc_{n-m-1}=\left(1+t_0\right)c_{n-m}=h\dfrac{c_{n-m-1}}{n-m}-\tau t_{n-m}$, то

$$c_{n-m-1}=\frac{(1+t_0)(n-m)}{h(1-n+m)}c_{n-m}-\frac{\tau t_{n-m}(n-m)}{h(1-n+m)}=\frac{(1+t_0)(n-m)}{h(1-n+m)}\left(c_{n-m}+\frac{\tau t_{n-m}}{1+t_0}\right)=$$

$$\frac{(1+t_0)(n-m)}{h(1-n+m)}\cdot\left(\left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^{n-m}\frac{\tau}{n-m}\sum_{k=n-m+1}^{n+1}k\left(-1\right)^k\left(1+t_0\right)^{k-1}h^{-k}t_k+\frac{\tau t_{n-m}}{1+t_0}\right)=$$

$$=\left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^{n-m-1}\frac{\tau}{n-m-1}\sum_{k=n-m}^{n+1}k\left(-1\right)^k\left(1+t_0\right)^{k-1}h^{-k}t_k.$$

Що й потрібно було довести. Отже, рівність (11) виконується для будь-якого $j=\overline{1,n}$.

Нехай $k = n + 1 – 2i$. Тоді:

$$i=\frac{n+1-k}{2};\quad k=n+1\rightarrow i=0;\quad k=n+1-j\rightarrow i=\frac{i}{2}$$

і рівність (11) можна записати у вигляді

$$c_{n-j}=\left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^{n-j}\frac{\tau}{n-j}\sum_{i=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\left(n+1-2i\right)\left(-1\right)^{n+1-2i}\left(1+t_0\right)^{n-2i}h^{-\left(n+1-2i\right)}t_{n+1-2i}.$$

(12)

Оскільки

$$T_{n+1}(x)=(n+1)\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{(-1)^i(n-i)!2^{n-2i}}{i!(n+1-2i)!}x^{n+1-2i},\text{ то}$$

$$t_{n+1-2i}=(-1)^i(n+1)\frac{(n-i!)}{i!(n+1-2i)!}\cdot 2^{n-2i}.$$

Підставивши t_{n+1-2i} у формули (12), одержимо:

$$c_{n-j}=\left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^{n-j}\frac{\tau(n+1)}{n-j}\sum_{i=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\frac{(-1)^{n+1-i}(1+t_0)^{n-2i}(n-i)!2^{n-2i}}{i!(n-2i)!h^{(n+1-2i)}}.$$

Нехай $n-j=k$. Тоді $j=n-k$ і формули можна записати у вигляді

$$c_k=\left(\frac{-h}{1+t_0}\right)^k\frac{\tau(n+1)}{k}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\frac{(-1)^{n+1-i}(1+t_0)^{n-2i}(n-i)!2^{n-2i}}{i!(n-2i)!h^{(n+1-2i)}}.$$

Одержали формули (2) для коефіцієнтів многочлена $y_n(x)$.

Використовуючи формули (2), запишемо c_1:

$$c_1=\frac{-h\tau(n+1)}{1+t_0}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{n+1-i}(1+t_0)^{n-2i}(n-i)!2^{n-2i}}{i!(n-2i)!h^{(n+1-2i)}}.$$

Тоді з другого рівняння системи (10) маємо:

$$c_1=\frac{-h\tau(n+1)}{1+t_0}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{n+1-i}(1+t_0)^{n-2i}(n-i)!2^{n-2i}}{i!(n-2i)!h^{(n+1-2i)}}=\frac{h}{1+t_0}+\tau\frac{t_1}{1+t_0},$$

звідки:

$$\tau=\left(-(n+1)\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{n+1-i}(1+t_0)^{n-2i}(n-i)!2^{n-2i}}{i!(n-2i)!h^{(n+1-2i)}}+\frac{t_1}{h}\right)^{-1}.$$

Одержали формулу (4) для τ. Отже, коефіцієнти многочлена $y_n(x)$ і τ справді шукаються відповідно за формулами (2) і (4).

Із першого рівняння системи (10) знаходимо c_0:

$$c_0=(1+t_0)^{-1}\left((1+t_0)\ln(1+t_0)-\tau t_0\right)$$

Розглянемо різницю $\ln(1+t_0+hx)-y_n(x)$. Позначимо:

$\ln(1+t_0+hx)-y_n(x)=r_n(x)$. (13)

Від рівності (7) віднімемо почленно рівність (8):

$$(1+t_0+hx)\left(y(x)-y_n(x)\right)=h\int_0^x\left(y(t)-y_n(t)\right)dt+\tau T_{n+1}(x).$$

Врахувавши позначення (13) отримаємо

$$(1+t_o+hx)r_n(x)=h\int_0^x r_n(t)dt+\tau T_{n+1}(x). \qquad (14)$$

Знайшовши $r_n'(x)$ та $r_n(0)$, замінимо дане інтегральне рівняння еквіва-лентою йому задачею Коші:

$$hr_n(x)+(1+t_0+hx)r_n'(x)=hr_n(x)+\tau T_{n+1}'(x);$$

$$(1+t_0+hx)r_n'(x)=T_{n+1}'(x),\quad r_n(0)=\frac{\tau t_0}{1+t_0}. \tag{15}$$

Розв'язком цієї задачі Коші є функція

$$r_n(x)=\frac{\tau}{1+t_o+hx}\left(T_{n+1}(x)-h(1+t_o+hx)\int_0^x\frac{T_{n+1}(t)\,dt}{(1+t_o+hx)^2}\right). \tag{16}$$

Покажемо, що це справді так:

$$r_n(0)=\frac{\tau}{1+t_o}\left(T_{n+1}(0)-h(1+t_o)\int_0^0\frac{T_{n+1}(t)\,dt}{(1+t_o+hx)^2}\right)=\frac{\tau t_0}{1+t_0};$$

$$r_n'(x)=\tau\left(\frac{hT_{n+1}(x)}{(1+t_o+hx)^2}+\frac{T_{n+1}'(x)}{(1+t_o+hx)}-\frac{hT_{n+1}(x)}{(1+t_o+hx)^2}\right)=\frac{\tau T_{n+1}'(x)}{(1+t_o+hx)};$$

$$(1+t_0+hx)r_n'(x)=T_{n+1}'(x).$$

Отже, розв'язком задачі Коші (15) та інтегрального рівняння (14) справді є функція (16).

Це означає, що при всіх $x\in[-1;1]$ виконується рівність (5).

Теорему доведено.

Якщо узяти $t_0=1$, $h=0{,}5$, то матимемо функцію $y=\ln(1+0{,}5x)$, для якої многочлен $y_2(x)$, побудований за А-методом, має вигляд:

$y_2(x)=\ln 2+\frac{16}{65}x-\frac{2}{65}x^2$. Для функції та одержаного наближення виконується нерівність

$$\left|\ln(1+0{,}5x)-y_2(x)\right|<0{,}010759,\quad x\in[-1;1].$$

ЛІТЕРАТЕРА:

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М. Наука, 1965. — 407с.
2. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Київ: Наук. думка, 1988. — 304 с.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию рівномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1976. – 512 с.
4. Дзядык В. К. Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций e^x, sin$x$ и др. //Укр. мат. журн. — 1973. — 25. №5 — с. 435–453.
5. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. — М. Наука, 1983. – 384 с.

Микитович М.

Науковий керівник – проф. Приймак М. В.

Науковий консультант — асист. Галан В. І.

ОЛІМПІАДА З ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ: ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

В умовах розвитку сучасного суспільства інформаційні технології глибоко проникають у життя людей. Вони дуже швидко перетворилися на життєво важливий стимул розвитку усіх сфер людської діяльності. Зараз важко знайти сферу, в якій не використовуються інформаційні технології.

Сучасний фахівець має володіти комп'ютером, розуміти функціональні можливості інформаційних технологій, уміти визначати їхнє місце у професіональній діяльності та побуті.