$\|x(t)\| \leq \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)m$ ;

$\left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}}{M}\right)\|x'(t)\| \leq \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)m;$

А це показує, що якщо $|h| \leq R$, то $x = |T_0(h)|$ задовольняє нерівність $|x(t)| \leq \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)N$. Значить, якщо справедливо $N\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right) \leq R$, то оператор $T_0$ відображає кулю $|h(t)| \leq R$ в себе. А значить можна застосувати зауваження до теореми 0.1 [2,475], яке говорить, що відображення $T_0$ має єдину нерухому точку $x_0(t)$, таку що $T_0(x_0) = x_0(t)$. Згідно з означенням оператора $T_0$, $x_0(t)$ є єдиним розв’язком крайової задачі (1), (2), що і треба було показати.

Таким чином теорема і зауваження до неї доведені.

**ЛІТЕРАТУРА:**


1. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник / Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.— К.: Либідь,2003. — 600 с.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720с.



*Бочар Г.*

*Науковий керівник – доц. Галан В.Д.*


## ПРО РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ НА ЗАМКНЕНИХ ОБЛАСТЯХ З КУСКОВО-ГЛАДКОЮ ГРАНИЦЕЮ

1. Майже у всіх галузях математики важливу роль відіграють задачі про апроксимацію функцій.

Під наближенням функції розуміють заміну за певним правилом однієї функції іншою, близькою до вихідної в тому чи іншому сенсі. Практична необхідність в такій заміні виникає в різних ситуаціях: коли цю функцію необхідно замінити більш простою і зручною для обчислень, відновити функціональну залежність за експериментальними даними, тощо.

Ми будемо працювати з таким розділом комплексного аналізу як наближення функції комплексної змінної, який вивчає апроксимацію функцій комплексної змінної за допомогою аналітичних функцій спеціальних класів. Центральною його проблемою є наближення функцій поліномами та раціональними функціями.

Загальна задача про можливість рівномірного наближення поліномами ставиться так: для яких компактів $K$ в комплексній площині будь-яка функція $f(z)$, яка є неперервною на $K$ і голоморфною у безлічі внутрішніх точок $K$, допускає рівномірну апроксимацію на $K$ (з будь-яким ступенем точності) за допомогою поліномів від $z$.

С.М. Мергелян [7] повністю розв’язав проблему про можливість рівномірного наближення алгебраїчними многочленами функцій комплексної змінної, заданих на компактних множинах. Прямі та обернені теореми рівномірного наближення досліджувались у роботах багатьох авторів. У роботах Ю.І. Волкова, В.К. Дзядика та Г.А. Алібекова [1,6] вперше знайдено відповідь на питання про те, які необхідні і достатні умови повинна задовольняти на замкнених множинах типу $A$ ( з кусково-гладкою границею) функція $f(z)$ для того, щоб її рівномірні наближення алгебраїчними многочленами степеня $\leq n$ мали порядок $n^{-s}, s > 0$ .

У даній роботі узагальнюються ці результати і розглядається питання про можливість наближення аналітичних в області $\mathfrak{M}$ типу $(B)$ і неперервних на $\overline{\mathfrak{M}}$ функцій алгебраїчними многочленами порядку $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, де $\omega(t)-$ довільна функція типу модуля неперервності. (Теорема 1)

2. Нехай $K$ – обмежений континуум, який містить у собі більше однієї точки і має однозв'язне доповнення $CK$ в розширеній комплексній площині; $\omega = \Phi(K,z)-$ функція, яка однолисто і конформно відображає область $CK$ на область $|\omega| > R$ і нормована умовою $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\Phi(K,z)}{z} = 1$ ; $z = \Psi(K,\omega)$ обернена до $\omega = \Phi(K,z)$ функція.

**<u>Означення.</u>** Обмежену однозв'язну область $\mathfrak{M}$ називатимемо областю типу $(B)$, якщо вона задовольняє такі умови:

а) Границя $L$ її є замкненою кривою Жордана, яка складається із скінченного числа гладких дуг $L_k\,(k = 1,2,\dots,m)$ з неперервними кривинами і має в кутових точках $z_k$ внутрішні кути величини $\alpha_k\pi$, де $0 \le \alpha_k < 2.$

б) Функція $z = \Psi(\mathfrak{M},\omega) = \Psi(\omega)$ в кожній точці $\omega$ кола $|\omega| = R$ , яка не збігається ні з однією точкою $\omega_k$, $\omega_k = \Phi\left(\mathfrak{M}, z_k\right)$, має неперервні і не рівні нулю похідні $\Psi'(\omega)$ і $\Psi''(\omega)$.

в) В околі кожної точки $\omega_k$ функції $\Psi(\omega)$, можна зобразити у вигляді рівностей

$$\Psi(\omega) = \lambda_{1,k}(\omega)(\omega-\omega_k)^{2-\alpha_k} + \Psi(\omega_k); \quad (1)$$

$$\Psi'(\omega) = \lambda_{2,k}(\omega)(\omega-\omega_k)^{1-\alpha_k}, \quad (1')$$

$$\Psi''(\omega) = \lambda_{3,k}(\omega)(\omega-\omega_k)^{-\alpha_k}, \quad (1'')$$

де $\lambda_{1,k}(\omega)$, $\lambda_{2,k}(\omega)$, $\lambda_{3,k}(\omega)-$ неперервні на колі $|\omega| = R$ функції і такі, що вираз $t^{-1}[\lambda_{2,k}(\omega_k e^{it}) - (2-\alpha_k)\lambda_{1,k}(\omega_k e^{it})] = t^{-1}\eta_k(t), t > 0,$ буде інтегрованою функцією на сегменті $[0; h]$, $h > 0.$

**<u>Зауваження 1.</u>** З рівностей (1) і ($1'$) випливає рівність $\eta_k(0) = 0$ при $k = 1,2,\dots,m$ .

(і )

**Зауваження 2.** Підклас множин типу , які є замкненими областями, складає правильну частину замкнених областей типу $(B)$. [6, С. 502-503]

**Означення.** Функцією типу модуля неперервності будемо називати визначену на $R_0 = [0; +\infty)$ неперервну функцію $w = w(t)$, яка володіє властивостями:

а) $w(0) = 0;$

б) $w(t) > 0$ при $t > 0;$

в) $w(t)$ не спадає на $[0; \infty);$

г) існує постійна $\lambda = \lambda(w) > 0$ така, що при всіх $t \geq \lambda$ $w(t) = w(\lambda)$. [8, С.108]

**Означення.** Нехай $\overline{\mathfrak{M}}$ – замкнена область типу $(B)$; $f(z)$ - аналітична в $\mathfrak{M}$ і

неперервна на функція; ξ точка на границі $L$ області $\mathfrak{M}$; $t \in [0; \pi]$ і

$\xi_t = \Psi\left[\overline{\mathfrak{M}}; \Phi\left(\overline{\mathfrak{M}};\ \xi\right) \cdot e^{-it}\right]$. Величину

$$\square(f;\xi;t) = \max_{\substack{z\in\overline{\mathfrak{M}} \\ |z-\xi|\leq|\xi_{|t|}-\xi|}} |f(z) - f(\xi)|$$

називатимемо узагальненим локальним модулем неперервності (у. л. м. н.) функції $f(z)$ в точці ξ границі області.

3. Пряма теорема теорії рівномірного наближення

**Теорема 1.** Якщо аналітична в області $\mathfrak{M}$ типу $(B)$ і неперервна на $\overline{\mathfrak{M}}$ функція $f(z)$ в

кожній точці ξ границі $L$ має у. л. м. н., що задовольняє нерівність $\square(f;\xi;t) \leq A_1\omega(t)$, де $A_1$ - абсолютна стала і $\omega(t)$ - довільна функція типу модуля неперервності, то при кожному натуральному $n$ можна побудувати алгебраїчний многочлен $P_n(z)$ степеня $\leq n$ такий, що виконуватиметься нерівність

$$\max_{z\in\overline{\mathfrak{M}}} |f(z) - P_n(z)| \leq A_2\omega\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (2)$$

Доведення цієї теореми викладено у магістерській роботі .

4. Обернені теореми

Нехай $z_0$ - точка на границі $L$ області $\mathfrak{M}$ типу $(B)$; $z_j$ – найближча або одна з двох

найближчих (вздовж $L$ ) до $z_0$ кутова точка на $L$; $\varphi_0$ - найменше за абсолютною величиною дійсне число таке, що $\Phi(\mathfrak{M};\ z_0) = \Phi(\mathfrak{M}; z_j)e^{i\varphi_0}$ (коли $z_0 = z_j$, то $\varphi_0 = 0$ ).

При кожному $k = 1,2,\dots,m$ введемо ще такі позначення: $q_k -$ ціла частина числа $\left(2-\alpha_k\right)^{-1}$; $r_k -$ найбільше ціле число $< \left(2-\alpha_k\right)^{-1}$; $\gamma(k;t)-$

відкрита зв'язна частина $L$, якій належить кутова точка $z_k$ і кінцями якої є точки $z_{k[t]}$ і $z_{k[-t]}, t > 0$, і, нарешті, якщо ω $(t)-$ функція типу модуля неперервності, то $\Omega(k;t)-$ та з функцій

$$t^{2-\alpha_k}\int_t^1 \frac{\omega(u)du}{u^{3-\alpha_k}}, \qquad t^{\nu(2-\alpha_k)}\int_0^t \frac{\omega(u)du}{u^{1+\nu(2-\alpha_k)}} + t^{(1+\nu)(2-\alpha_k)}\int_t^1 \frac{\omega(u)du}{u^{1+(1+\nu)(2-\alpha_k)}}$$
$$(\nu = 1,2,\dots,r_k),$$

яка при $t \to 0$ є нескінченно малою найвищого порядку.

**Теорема 2.** Якщо для заданої на замкненій області $\overline{\mathfrak{M}}$ типу $(B)$ функції $f(z)$ при кожному $n = 1,2,3,\dots$ існуватиме алгебраїчний многочлен $P_n(z)$ степеня $n$ такий, що

матиме місце нерівність (2), то функція $f(z)$ буде аналітичною в $\mathfrak{M}$, неперервною на $\overline{\mathfrak{M}}$ і її

у. л. м. н. в кожній точці $z_0$ границі $L, L = \overline{\mathfrak{M}}\setminus\mathfrak{M}$ буде задовольняти нерівність

$$\omega(f;z_0;t) \le$$
$$\le \begin{cases} A_6 t^{2-\alpha_j}\int_t^1 \frac{\omega(u)du}{u^{3-\alpha_j}}, & \text{коли } |\varphi_0| \le A_7 \cdot t, \\ A_6 t\left[\int_t^{|\varphi_0|} \frac{\omega(u)}{u^2}du + |\varphi_0|^{1-\alpha_j}\int_{|\varphi_0|}^1 \frac{\omega(u)du}{u^{3-\alpha_j}}\right], & \text{коли } A_7 t < |\varphi_0| < A_8, \\ A_6 t\int_t^1 \frac{\omega(u)}{u^2}du, & \text{коли} \end{cases}$$

Теорема 2 не завжди дає задовільне обернення теореми 1. Вона допускає таке уточнення.

**Теорема 3.** Якщо виконуються усі умови теореми 2, то функцію $f(z)$ можна зобразити у вигляді рівності

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k(z)[T_k(z) + Q(k;z)],$$

в якій $Q(k;z)-$ алгебраїчні многочлени степенів $\le r_k + (m-1)\cdot \max_k\{1+q_k\}$ ; $\pi_k(z)-$ система многочленів степенів $\le (m-1)\cdot \max_k\{q_k\}$, яка задовольняє тотожність

$$\sum_{k=1}^{m} \pi_k(z)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m}\left(z-z_j\right)^{1+q_j} \equiv 1,$$

а $T_k(z)-$ аналітичні в $\mathfrak{M}$ і неперервні на $\overline{\mathfrak{M}}$ функції, кожна з яких в точці $z_0 \in L$

має у. л. м. н., що задовольняє нерівність

$$\omega(T_k;z_0;t) \le$$

$\{(A_1 9\, \Omega(k;t)$, коли $z_1 0 \in \gamma(k;A_1 7\, t)$, $@A_1 9 [t \int_1 t^1 |\varphi_1 0| [(\omega(u))/u^2\, du] + t/|\varphi_1 0|\, \Omega(k;|\varphi_1 0|)]$, коли $z_1 0 \in \gamma(k;A_1 8)(k;A_1 7\, t)$. $@A_1 9\, t \int_1 t^1 1 [(\omega(u))/u^2\, du]$, коли $z_1 0 \in L\backslash\gamma(k;A_1 8).)$

5. Пряма теорема 1 і обернені теореми 2, 3 дають змогу сформулювати конструктивну характеристику аналітичних в областях $\mathfrak{M}$ типу $(B)$ і неперервних на $\overline{\mathfrak{M}}$ функцій, які допускають за допомогою алгебраїчних многочленів степеня $\leq n$ рівномірні наближення порядку $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$.

Результати роботи можуть бути використані математиками, які займаються питанням наближення функцій.

**ЛІТЕРАТУРА:**


1. Волков Ю. И. Некоторые вопросы приближения функций комплексной переменной в областях с углами / Ю. И. Волков // Первая республ. матем. конф. молодых исследователей. – К.,1965. – №11. – С. 130–131.
2. Дзядык В.К. О проблеме С.Н. Никольского в комплексной области/ В.К. Дзядык // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1959. – Т.23 . – №5. – С. 697–736
3. Дзядык В.К. К вопросу о приближении непрерывных функцій в замкнутих областях с уграми и о проблеме С.Н. Никольского I / В.К. Дзядык // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1962. – Т.26 . – №6. – С. 797–824
4. Дзядык В.К. К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях и о проблеме С. М. Никольского II / В.К. Дзядык // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1963. – Т.27 . – С. 1135–1161
5. Дзядык В.К. Обратные теоремы приближения функций в комплексных областях / В.К. Дзядык // Укр. матем. журнал. – 1963. – Т.15. – №4. – С. 365–375
6. Дзядык В.К., Алибеков Г.А. О равномерном приближении функций комплексного переменного на замкнутых множествах с углами / В.К. Дзядык, Г.А. Алибеков // Математический сборник. – 1968. – Т.75(117) . – №4. – С. 502–557
7. Мергелян С.Н. О представлении функций рядами полиномов на замкнутых множествах / С.Н.Мергелян // ДАН СССР. – 1951. – Т.78. – №3. – С. 405–408.
8. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. – М. : Физматгиз. – 1960. – 624 с.