



ISSN 2075-9827

Карпатські математичні публікації

Carpathian mathematical publications

Карпатские математические публикации

Том 11

№ 1

2019

Carpathian
mathematical
publications
Scientific journal

Editor in Chief

Zagorodnyuk A. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Associate Editors

Artemovych O. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Lopushansky O. (Rzeszów, Poland)

Executive Secretary

Sharyn S. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Editorial Board

Berinde V. (Baia Mare, Romania)

Bobryk R. (Kielce, Poland)

Bodnar D. (Ternopil, Ukraine)

Vynnytskyi B. (Drohobych, Ukraine)

Goy T.P. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Grigorchuk R. (College Station, USA)

Hryniv R. (Lviv, Ukraine)

Derkach V. (Kyiv, Ukraine)

Dmytryshyn R. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Drozd Yu. (Kyiv, Ukraine)

Dziok J. (Rzeszów, Poland)

Zarichnyi M. (Rzeszów, Poland)

Zatorsky R. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Ivashkovych S. (Lille, France)

Kachanovsky M. (Kyiv, Ukraine)

Kirichenko V. (Kyiv, Ukraine)

Kiselev A. (Houston, USA)

Kopytko B. (Lviv, Ukraine)

Malytska H. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Maslyuchenko V. (Chernivtsi, Ukraine)

Mel'nyk T. (Kyiv, Ukraine)

Nykyforchyn O. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Osyrchuk M. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Petravchuk A. (Kyiv, Ukraine)

Petryshyn L. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Pylypiv V. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Pliczko A. (Cracow, Poland)

Popov M. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Repovš D. (Ljubljana, Slovenia)

Samojlenko Yu. (Kyiv, Ukraine)

Skaskiv O. (Lviv, Ukraine)

Solomko A. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Storozh O. (Lviv, Ukraine)

Stepin S. (Bialystok, Poland)

Filevych P. (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Карпатські
математичні
публікації
Науковий журнал

Головний редактор

Загороднюк А.В. (Івано-Франківськ, Україна)

Заступники головного редактора

Артемович О.Д. (Івано-Франківськ, Україна)

Лопушанський О. (Жешув, Польща)

Відповідальний секретар

Шарин С.В. (Івано-Франківськ, Україна)

Редакційна колегія

Берінде В. (Бая-Маре, Румунія)

Бобрик Р. (Кельце, Польща)

Боднар Д.І. (Тернопіль, Україна)

Винницький Б.В. (Дрогобич, Україна)

Гой Т.П. (Івано-Франківськ, Україна)

Григорчук Р. (Колледж Стейшн, США)

Гринів Р.О. (Львів, Україна)

Деркач В.О. (Київ, Україна)

Дмитришин Р.І. (Івано-Франківськ, Україна)

Дрозд Ю.А. (Київ, Україна)

Дзьок Я. (Жешув, Польща)

Зарічний М.М. (Жешув, Польща)

Заторський Р.А. (Івано-Франківськ, Україна)

Івашкович С. (Лілль, Франція)

Качановський М.О. (Київ, Україна)

Кириченко В.В. (Київ, Україна)

Кисельов О.В. (Х'юстон, США)

Копитко Б.І. (Львів, Україна)

Малицька Г.П. (Івано-Франківськ, Україна)

Маслюченко В.К. (Чернівці, Україна)

Мельник Т.А. (Київ, Україна)

Никифорчин О.Р. (Івано-Франківськ, Україна)

Осипчук М.М. (Івано-Франківськ, Україна)

Петравчук А.П. (Київ, Україна)

Петришин Л.Б. (Івано-Франківськ, Україна)

Пилипів В.М. (Івано-Франківськ, Україна)

Плічко А. (Краків, Польща)

Попов М.М. (Івано-Франківськ, Україна)

Реповш Д. (Любляна, Словенія)

Самойленко Ю.С. (Київ, Україна)

Скасків О.Б. (Львів, Україна)

Соломко А.В. (Івано-Франківськ, Україна)

Сторож О.Г. (Львів, Україна)

Стьопін С.А. (Білосток, Польща)

Філевич П.В. (Івано-Франківськ, Україна)

Журнал відображено в: Mathematical Reviews, Zentralblatt MATH, Emerging Sources Citation Index (Web of Science), Scopus, Ulrich's Periodicals Directory, DOAJ (Directory of Open Access Journals), Index Copernicus International, POL-index, Polska Bibliografia Naukowa, ERIH PLUS, Google Scholar, Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського.



BILANYK I.B.¹, BODNAR D.I.^{2,3}, BUYAK L.M.³

REPRESENTATION OF A QUOTIENT OF SOLUTIONS OF A FOUR-TERM LINEAR RECURRENCE RELATION IN THE FORM OF A BRANCHED CONTINUED FRACTION

The quotient of two linearly independent solutions of a four-term linear recurrence relation is represented in the form of a branched continued fraction with two branches of branching by analogous with continued fractions. Formulas of partial numerators and partial denominators of this branched continued fraction are obtained. The solutions of the recurrence relation are canonic numerators and canonic denominators of \mathcal{B} -figured approximants. Two types of figured approximants \mathcal{A} -figured and \mathcal{B} -figured are often used. A n th \mathcal{A} -figured approximant of the branched continued fraction is obtained by adding a next partial quotient to the $(n - 1)$ th \mathcal{A} -figured approximant. A n th \mathcal{B} -figured approximant of the branched continued fraction is a branched continued fraction that is a part of it and contains all those elements that have a sum of indexes less than or equal to n . \mathcal{A} -figured approximants are widely used in proving of formulas of canonical numerators and canonical denominators in a form of a determinant, \mathcal{B} -figured approximants are used in solving the problem of corresponding between multiple power series and branched continued fractions. A branched continued fraction of the general form cannot be transformed into a constructed branched continued fraction. For calculating canonical numerators and canonical denominators of a branched continued fraction with N branches of branching, $N > 1$, the linear recurrent relations do not hold. \mathcal{B} -figured convergence of the constructed fraction in a case when coefficients of the recurrence relation are real positive numbers is investigated.

Key words and phrases: branched continued fraction, four-term recurrence relation.

¹ Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine

² Ternopil National Economic University, 11 Lvivska str., 46020, Ternopil, Ukraine

³ Volodymyr Gnatiuk Ternopil National Pedagogical University, 2 Kryvonosa str., 46027, Ternopil, Ukraine

E-mail: i.bilanyk@ukr.net (Bilanyk I.B.), bodnar4755@ukr.net (Bodnar D.I.),

lesyabuyak@ukr.net (Buyak L.M.)

INTRODUCTION

It is well known that the general solution of a linear homogeneous recurrence relation of second order: $y_n = b_n y_{n-1} + a_n y_{n-2}$, $n = 1, 2, \dots$, where the a_n, b_n , $n \geq 1$, are complex numbers, can be represented in a form of a linear combination of two linearly independent solutions

$$y^{(1)} = (1, 0, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots), \quad y^{(2)} = (0, 1, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots).$$

These solutions are, respectively, canonical numerators and canonical denominators of approximants of the continued fractions [15, 18, 19]

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}.$$

In this paper, an analogous idea for a four-term linear recurrence relation

$$y_n = c_n y_{n-1} + b_n y_{n-2} + a_n y_{n-3}, \quad (1)$$

where the a_n, b_n, c_n , $n \geq 2$, are complex numbers, is considered.

Different constructions of multidimensional generalizations arise as a result of considering the N -term recurrent relation, $N > 1$, [8, 12, 18]. They are widely used for compatible approximations, for representation of solutions of algebraic equations, etc. The formulas of the elements of these fractions were not obtained, in general, except for the Furshtenau's two-dimensional generalization of continued fractions [14]. B. V. Krukowski has proved the theorem of convergence of these fractions [16].

This investigation leads to branched continued fractions (BCF) that are a multidimensional generalization of continued fractions. Thus, BCF of the general form are under consideration [7, 9, 11, 21]. Also, the different forms of BCF exist, in particular, BCF of the special form [1, 3–6, 10, 13], two-dimensional continued fractions [2, 17, 20], etc. The different constructions of their approximants [7] and, respectively, the different types of convergence appear in the considering of different mathematical problems.

Let

$$\mathcal{I} = \left\{ i(k) = (i_1, i_2, \dots, i_k) : 1 \leq i_p \leq 2, p = \overline{1, k}, k \geq 1 \right\}$$

be the set of multiindices. Let us introduce an order relation \prec on the set \mathcal{I} for $i(p) \in \mathcal{I}$ and $j(q), j(p) \in \mathcal{I}$, where $j(s) = (j_1, j_2, \dots, j_s)$, $s \in \mathbb{N}$:

- 1) $i(p) \prec j(q)$, if $p < q$;
- 2) $i(p) \prec j(p)$, if $i_1 < j_1$;
- 3) $i(p) \prec j(p)$, if exists r , $1 \leq r < p$, such that $i_k = j_k$, $k = \overline{1, r}$, $i_{r+1} < j_{r+1}$.

Let we have sequences of complex numbers $\{\tilde{\zeta}_{i(k)}\}$, $\{\eta_{i(k)}\}$, where $i(k) \in \mathcal{I}$, then

$$\sum_{i_1=1}^2 \frac{\tilde{\zeta}_{i(1)}}{\eta_{i(1)} + \sum_{i_2=1}^2 \frac{\tilde{\zeta}_{i(2)}}{\eta_{i(2)} + \dots}} = \sum_{i_1=1}^2 \frac{\tilde{\zeta}_{i(1)}}{\eta_{i(1)}} + \sum_{i_2=1}^2 \frac{\tilde{\zeta}_{i(2)}}{\eta_{i(2)}} + \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^2 \frac{\tilde{\zeta}_{i(k)}}{\eta_{i(k)}} \quad (2)$$

be a general branched continued fraction with two branches of branching with complex elements.

A n th approximant of the BCF (2) is a finite BFC of the form

$$f_n = \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^2 \frac{\tilde{\zeta}_{i(k)}}{\eta_{i(k)}}, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

The continued fraction

$$\frac{\tilde{\zeta}_{i(1)}}{\eta_{i(1)} + \eta_{i(2)} + \dots + \eta_{i(k)} + \dots} \quad (4)$$

is called a $(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots)$ branch of the BCF (2). Let us fix $i(n) \in \mathcal{I}$, then a (i_1, i_2, \dots, i_n) branch be a finite branch of the BCF (3).

Length of a finite (i_1, i_2, \dots, i_n) branch of the BCF (3) is a number of partial quotient of the n th approximant of the continued fraction (4).

Each branch in the finite BFC (3) has length equal n . A figured approximant of the BFC (2) is a BFC that is a part of (2) and has at least two branches with nonequal length. Two types of figured approximants are often used. In particular, \mathcal{A} -figured approximants are widely used in proving of formulas of canonical numerators and canonical denominators in a form of a determinant [7], \mathcal{B} -figured approximants are used in solving the problem of corresponding between a multiple power series and a BFC.

Let $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ denotes that $a = c, b = d$.

A n th \mathcal{B} -figured approximant of (2) is a BCF

$$\widehat{f}_n = \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^2 \frac{\xi_{i(k)}^*}{\eta_{i(k)}^*}, \quad n \geq 1, \quad (5)$$

where

$$\frac{\xi_{i(k)}^*}{\eta_{i(k)}^*} \equiv \begin{cases} \frac{\xi_{i(k)}}{\eta_{i(k)}}, & \text{if } i_1 + i_2 + \dots + i_k \leq n; \\ 0 & \text{if } i_1 + i_2 + \dots + i_k > n. \\ \frac{1}{1} \end{cases}$$

The BCF (2) converges (\mathcal{B} -figured converges), if the finite limit of its sequence of approximants f_n (\mathcal{B} -figured approximants \widehat{f}_n) exists.

The canonical numerator A_n and the canonical denominator B_n of the \mathcal{B} -figured approximant \widehat{f}_n are, respectively, the numerator and the denominator of a calculated BCF (5), $\widehat{f}_n = A_n/B_n$. In calculating we use the following algorithm [7]

$$\frac{A_n}{B_n} \equiv \sum_{i_1=1}^2 \frac{\xi_{i(1)}^* \eta'_{i(1)}}{\eta_{i(1)}^* \eta'_{i(1)} + \xi'_{i(1)}}, \quad n \geq 1, \quad (6)$$

and

$$\frac{\xi'_{i(m)}}{\eta'_{i(m)}} \equiv \sum_{i_{m+1}=1}^2 \frac{\xi_{i(m+1)}^* \eta'_{i(m+1)}}{\eta_{i(m+1)}^* \eta'_{i(m+1)} + \xi'_{i(m+1)}}, \quad i(m) \in \mathcal{I}, \quad m = n-1, n-2, \dots, 1; \quad n \geq 2, \quad (7)$$

where

$$\xi'_{i(n)} = 0, \quad \eta'_{i(n)} = 1, \quad i_p = \overline{1, 2}, \quad p = \overline{1, n}, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

The algorithm (6)–(8) is equivalent to the gradual algorithm of calculation of the BCF (5) without any reductions in the process.

1 SECTION WITH RESULTS

Let the $y^{(1)} = (1, 0, b_1, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, \dots)$, $y^{(2)} = (0, 1, c_1, y_2^{(2)}, y_3^{(2)}, \dots)$, be the two solutions of equation (1), where the b_1, c_1 are complex numbers. These solutions yield all three linear independent solutions of (1), for example,

$$y^{(1)} = (1, 0, 0, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, \dots), \quad y^{(2)} = (0, 1, 0, y_2^{(2)}, y_3^{(2)}, \dots), \quad y^{(3)} = (1, 0, 1, y_2^{(3)}, y_3^{(3)}, \dots).$$

Put $A_k = y_k^{(1)}$, $B_k = y_k^{(2)}$, $k = -1, 0, 1, \dots$, where

$$\begin{aligned} A_n &= c_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} + a_n A_{n-3}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ B_n &= c_n B_{n-1} + b_n B_{n-2} + a_n B_{n-3}, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

and

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = b_1, \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = c_1. \quad (10)$$

By analogous with a continued fraction let us construct the BCF such that each its n th \mathcal{B} -figured approximant equals A_n/B_n , $n \geq 1$.

If $n = 1$ then $A_1/B_1 = b_1/c_1$. For $n = 2$ we have $A_2/B_2 = b_1/(c_1 + b_2 c_1^{-1}) + a_1/(c_2 c_1 + b_2)$. If $n \geq 3$ we replace n by $n - 1$ in (9) and put the obtained value A_{n-1} in (9), we get

$$A_n = \gamma_{n-1}^{(n)} A_{n-2} + \beta_{n-1}^{(n)} A_{n-3} + \alpha_{n-1}^{(n)} A_{n-4}, \quad (11)$$

where $\gamma_{n-1}^{(n)} = c_{n-1} c_n + b_n$, $\beta_{n-1}^{(n)} = b_{n-1} c_n + a_n$, $\alpha_{n-1}^{(n)} = a_{n-1} c_n$. Next, if $n \geq 4$, by substituting $n - 2$ for n in (9) and putting obtained A_{n-2} in (11), we get a new formula for A_n , etc. If $n \geq r + 2$, after $(n - r)$ steps we have

$$A_n = \gamma_r^{(n)} A_{r-1} + \beta_r^{(n)} A_{r-2} + \alpha_r^{(n)} A_{r-3}, \quad (12)$$

where

$$\gamma_r^{(n)} = c_r \gamma_{r+1}^{(n)} + \beta_{r+1}^{(n)}, \quad \beta_r^{(n)} = b_r \gamma_{r+1}^{(n)} + \alpha_{r+1}^{(n)}, \quad \alpha_r^{(n)} = a_r \gamma_{r+1}^{(n)}, \quad (13)$$

$r = n - 1, n - 2, \dots, 2$, and $\gamma_n^{(n)} = c_n$, $\beta_n^{(n)} = b_n$, $\alpha_n^{(n)} = a_n$.

An analogous relation holds for B_n

$$B_n = \gamma_r^{(n)} B_{r-1} + \beta_r^{(n)} B_{r-2} + \alpha_r^{(n)} B_{r-3}, \quad (14)$$

where $\gamma_r^{(n)}, \beta_r^{(n)}, \alpha_r^{(n)}, r = n - 1, n - 2, \dots, 2$, are defined by (13) and $\gamma_n^{(n)} = c_n$, $\beta_n^{(n)} = b_n$, $\alpha_n^{(n)} = a_n$, with initial conditions from (10).

Let us introduce the following notation

$$\begin{aligned} c'_k &= c_k c_{k-1} + b_k, \quad k = \overline{2, n}; \quad n \geq 2; \\ b'_k &= b_k c_{k-2} + a_k, \quad k = \overline{3, n}; \quad n \geq 3; \\ a'_k &= a_k c_{k-3}, \quad k = \overline{4, n}; \quad n \geq 4; \end{aligned} \quad (15)$$

and

$$w_j^{(n)} = \frac{\beta_j^{(n)}}{\gamma_j^{(n)}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad v_j^{(n)} = \frac{c_{j-2} \beta_j^{(n)} + \alpha_j^{(n)}}{\gamma_j^{(n)}}, \quad j = \overline{3, n}, \quad n \geq 3. \quad (16)$$

Combining this with the initial conditions (10) and relations (12)–(14), for $r = 2$, we obtain

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\gamma_2^{(n)} A_1 + \beta_2^{(n)} A_0 + \alpha_2^{(n)} A_{-1}}{\gamma_2^{(n)} B_1 + \beta_2^{(n)} B_0 + \alpha_2^{(n)} B_{-1}} = \frac{\gamma_2^{(n)} b_1 + \alpha_2^{(n)}}{\gamma_2^{(n)} c_1 + \beta_2^{(n)}} = \frac{\beta_1^{(n)}}{\gamma_1^{(n)}} = w_1^{(n)}, \quad n \geq 3.$$

Using the denoting (15) and (16) we get

$$w_1^{(n)} = \frac{b_1}{c_1 + w_2^{(n)}} + \frac{a_2 \gamma_3^{(n)}}{c_1 (c_2 \gamma_3^{(n)} + \beta_3^{(n)}) + b_2 \gamma_3^{(n)} + \alpha_3^{(n)}} = \frac{b_1}{c_1 + w_2^{(n)}} + \frac{a_2}{c'_2 + v_3^{(n)}}.$$

Let us prove the recurrent formulas for $w_k^{(n)}$, $k = \overline{2, n-2}$, $n \geq 4$, $v_k^{(n)}$, $k = \overline{3, n-2}$, $n \geq 5$. We obtain

$$w_k^{(n)} = \frac{\beta_k^{(n)}}{\gamma_k^{(n)}} = \frac{b_k \gamma_{k+1}^{(n)} + \alpha_{k+1}^{(n)}}{c_k \gamma_{k+1}^{(n)} + \beta_{k+1}^{(n)}} = \frac{b_k}{c_k + w_{k+1}^{(n)}} + \frac{a_{k+1}}{c'_{k+1} + v_{k+2}^{(n)}}. \quad (17)$$

Analogously

$$v_k^{(n)} = \frac{c_{k-2} \beta_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)}}{\gamma_k^{(n)}} = \frac{c_{k-2} (b_k \gamma_{k+1}^{(n)} + \alpha_{k+1}^{(n)}) + a_k \gamma_{k+1}^{(n)}}{c_k \gamma_{k+1}^{(n)} + \beta_{k+1}^{(n)}} = \frac{b'_k}{c_k + w_{k+1}^{(n)}} + \frac{a'_{k+1}}{c'_{k+1} + v_{k+2}^{(n)}}. \quad (18)$$

Let us now consider the case $k = n - 1$

$$w_{n-1}^{(n)} = \frac{b_{n-1}}{c_{n-1} + \frac{b_n}{c_n}} + \frac{a_n}{c'_n}, \quad n \geq 2, \quad v_{n-1}^{(n)} = \frac{b'_{n-1}}{c_{n-1} + \frac{b_n}{c_n}} + \frac{a'_n}{c'_n}, \quad n \geq 4. \quad (19)$$

If we put $w_n^{(n)} = \frac{b_n}{c_n}$, $v_n^{(n)} = \frac{b'_n}{c'_n}$, $w_{n+1}^{(n)} = v_{n+1}^{(n)} = 0$, $w_{n+2}^{(n)} = v_{n+2}^{(n)} = \infty$ we have that recurrent formulas (17), (18) hold for $k = n - 1, n$, as well.

Consider the BCF (2), where

$$\zeta_1 = b_1, \quad \zeta_2 = a_2, \quad (20)$$

and for all $i(k) \in \mathcal{I}$, $k \geq 2$

$$\zeta_{i(k)} = \begin{cases} b_{i_1+i_2+\dots+i_k} & \text{if } i_{k-1} = i_k = 1; \\ b'_{i_1+i_2+\dots+i_k} & \text{if } i_{k-1} = 2, i_k = 1; \\ a_{i_1+i_2+\dots+i_k} & \text{if } i_{k-1} = 1, i_k = 2; \\ a'_{i_1+i_2+\dots+i_k} & \text{if } i_{k-1} = 2, i_k = 2, \end{cases} \quad (21)$$

and for all $i(k) \in \mathcal{I}$, $k \geq 1$

$$\eta_{i(k)} = \begin{cases} c_{i_1+i_2+\dots+i_k} & \text{if } i_k = 1; \\ c'_{i_1+i_2+\dots+i_k} & \text{if } i_k = 2, \end{cases} \quad (22)$$

where the a_i, b_i, c_i , $i \geq 1$, are coefficients of (1), the a'_{i+2}, b'_{i+1}, c'_i , $i \geq 2$, are obtained from (15).

Theorem 1. Let $\{A_n\}, \{B_n\}$ be sequences of complex numbers such that

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = b_1, \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = c_1,$$

and

$$A_n = c_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} + a_n A_{n-3}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$B_n = c_n B_{n-1} + b_n B_{n-2} + a_n B_{n-3}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

where the a_n, b_n, c_n , $n \geq 1$, are complex constants. Then the A_n, B_n are the canonical numerator and the canonical denominator of n th \mathcal{B} -figured approximant of the BCF (2), i.e. $\hat{f}_n = A_n/B_n$.

Proof. Applying the equality $A_n/B_n = w_1^{(n)}$, $n \geq 1$, we use the recurrent relations (17)–(19) and step by step write the value A_n/B_n in a form of a finite BCF that is equal \hat{f}_n . On the first step we have

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{b_1}{c_1 + w_2^{(n)}} + \frac{a_2}{c'_2 + v_3^{(n)}} = \frac{\zeta_1}{\eta_1 + w_2^{(n)}} + \frac{\zeta_2}{\eta_2 + v_3^{(n)}}.$$

After the second step we get

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\zeta_1}{\eta_1 + \frac{\zeta_{1,1}}{\eta_{1,1} + w_3^{(n)}} + \frac{\zeta_{1,2}}{\eta_{1,2} + v_4^{(n)}}} + \frac{\zeta_2}{\eta_2 + v_3^{(n)'}}$$

and after the third step we obtain

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\zeta_1}{\eta_1 + \frac{\zeta_{1,1}}{\eta_{1,1} + \frac{\zeta_{1,1,1}}{\eta_{1,1,1} + w_4^{(n)}} + \frac{\zeta_{1,1,2}}{\eta_{1,1,2} + v_5^{(n)}}} + \frac{\zeta_{1,2}}{\eta_{1,2} + v_4^{(n)}}} + \frac{\zeta_2}{\eta_2 + \frac{\zeta_{2,1}}{\eta_{2,1} + w_4^{(n)}} + \frac{\zeta_{2,2}}{\eta_{2,2} + v_5^{(n)}}},$$

etc. Using the method of mathematical induction we prove that after m steps, $1 < m < n$, we get

$$\frac{A_n}{B_n} = \prod_{k=1}^m \sum_{i_k=1}^2 \frac{\zeta_{i(k)}^*}{\eta_{i(k)}^*}, \quad (23)$$

where $\zeta_{i(k)}^* = \zeta_{i(k)}$, if $i_1 + i_2 + \dots + i_k \leq m$ or $i_1 + i_2 + \dots + i_k = m + 1$ and $i_k = 2$; if $i_1 + i_2 + \dots + i_k \leq m - 1$, then $\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)}$; if $i_k = 1$ and $i_1 + i_2 + \dots + i_k = m$, then $\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + w_{m+1}^{(n)}$; if $i_k = 2$ and $i_1 + i_2 + \dots + i_k = m$, then $\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + v_{m+1}^{(n)}$; if $i_k = 2$ and $i_1 + i_2 + \dots + i_k = m + 1$, then $\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + v_{m+2}^{(n)}$. In all other cases $\frac{\zeta_{i(k)}^*}{\eta_{i(k)}^*} \equiv \frac{0}{1}$.

Let us make the next, $m + 1$, step. Let $i_1 + i_2 + \dots + i_k = m$, $i_k = 1$, then

$$\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + w_{m+1}^{(n)} = \eta_{i(k)} + \frac{b_{m+1}}{c_{m+1} + w_{m+2}^{(n)}} + \frac{a_{m+2}}{c'_{m+2} + v_{m+3}^{(n)}}$$

or by using (21), (22) we obtain

$$\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + \frac{\zeta_{i(k),1}}{\eta_{i(k),1} + w_{m+2}^{(n)}} + \frac{\zeta_{i(k),2}}{\eta_{i(k),2} + v_{m+3}^{(n)}}.$$

If $i_1 + i_2 + \dots + i_k = m$, $i_k = 2$, then

$$\begin{aligned} \eta_{i(k)}^* &= \eta_{i(k)} + v_{m+1}^{(n)} = \eta_{i(k)} + \frac{b'_{m+1}}{c_{m+1} + w_{m+2}^{(n)}} + \frac{a'_{m+2}}{c'_{m+2} + v_{m+3}^{(n)}} \\ &= \eta_{i(k)} + \frac{\zeta_{i(k),1}}{\eta_{i(k),1} + w_{m+2}^{(n)}} + \frac{\zeta_{i(k),2}}{\eta_{i(k),2} + v_{m+3}^{(n)}}. \end{aligned}$$

If $i_1 + i_2 + \dots + i_k = m + 1$, $i_k = 2$, then $\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + v_{m+2}^{(n)}$.

Hence, we get the equality (23), where m is replaced by $m + 1$.

Put $m = n - 1$. Then, using the equalities (19) we obtain that $\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + \frac{\xi_{i(k),1}}{\eta_{i(k),1}}$ if $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n - 1$, and $\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)}$ if $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$, $i_k = 2$.

Thus,

$$\frac{A_n}{B_n} = \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^2 \frac{\xi_{i(k)}^*}{\eta_{i(k)}^*} = \widehat{f}_n.$$

□

Remark 1. A BCF with two branches of branching with arbitrary complex elements

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i(k)=1}^2 \frac{\alpha_{i(k)}}{\beta_{i(k)}} \quad (24)$$

can not be transformed into the form (2), where the $\xi_{i(k)}$, $\eta_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, are determined by formulas (20)–(22). For calculating canonical numerators and canonical denominators of a BCF with N branches of branching, $N > 1$, the linear recurrent relations do not hold.

Let us consider the n th \mathcal{B} -figured approximants of BCF (24) and (2). Let $n = 2$, then we get second \mathcal{B} -figured approximant of the BCF (24) $\widehat{g}_2 = \alpha_1 / (\beta_1 + \alpha_{1,1}\beta_{1,1}^{-1}) + \alpha_2 / \beta_2$, and by using the formulas (20)–(22) and (15) we obtain second \mathcal{B} -figured approximant of the BCF (2) $\widehat{f}_2 = b_1 / (c_1 + b_2c_2^{-1}) + a_2 / (c_1c_2 + b_2)$. If we put $b_1 = \alpha_1$, $c_1 = \beta_1$, $a_2 = \alpha_2$, $b_2 = \alpha_{11}$, $c_2 = \beta_{12}$, then we get that the relation $\beta_1\beta_{12} + \alpha_{11} = \beta_2$ must hold. But the β_2 is arbitrary. Hence, this is the case that illustrates the truth of the Remark 1.

Theorem 2. Let the coefficients $a_n, b_n, c_n, n \geq 2$, of equation (1) be positive real numbers such that

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mu_k = \infty, \quad (25)$$

where

$$\mu_k = \min_{k \leq j \leq 2k} \left\{ \frac{M_j}{R_{j+1}}, \frac{M_{j+1}}{R'_{j+2}} \right\}, \quad k \geq 2,$$

$$M_j = c_j c'_j c_{j+1} c'_{j+2}, \quad j \geq 2,$$

$$R_j = b_j c'_{j-1} c'_{j+1} + a_{j+1} c_{j-1} c_j, \quad j \geq 3,$$

$$R'_j = b'_j c'_{j-1} c'_{j+1} + a'_{j+1} c_{j-1} c_j, \quad j \geq 4,$$

and $a'_{i+2}, b'_{i+1}, c'_i, i \geq 2$, are determined by (15). Then the BCF (2), whose elements satisfy relations (20)–(22), \mathcal{B} -figured converges.

Proof. Let us show that the elements of the BFC (2) satisfy the conditions of the Theorem 3.11 [7, p. 85]. For this, we consider the following expressions $d_{i(k+1)} = \eta_{i(k)} \eta_{i(k+1)} / \xi_{i(k+1)}$, $i(k+1) \in \mathcal{I}$, $k \geq 2$. If we fix $i(k-1) \in \mathcal{I}$, $k \geq 2$, using the relations (21), (22), we obtain

$$d_{i(k-1),1,1} = \frac{c_j c_{j+1}}{b_{j+1}}, \quad d_{i(k-1),2,1} = \frac{c_{j+1} c_{j+2}}{b'_{j+2}}, \quad d_{i(k-1),1,2} = \frac{c'_j c'_{j+2}}{a_{j+2}}, \quad d_{i(k-1),2,2} = \frac{c'_{j+1} c'_{j+3}}{a'_{j+3}},$$

where $j = \sum_{l=1}^{k-1} i_l + 1$. From this we obtain

$$\begin{aligned} \min_{i(k+1) \in \mathcal{I}, k \geq 2} \left\{ d_{i(k+1)} \right\} &= \min_{k \leq j \leq 2k, k \geq 2} \left\{ \frac{c_j c_{j+1}}{b_{j+1}}, \frac{c_{j+1} c_{j+2}}{b'_{j+2}}, \frac{c'_j c'_{j+2}}{a_{j+2}}, \frac{c'_{j+1} c'_{j+3}}{a'_{j+3}} \right\} \\ &\geq \min_{k \leq j \leq 2k, k \geq 2} \left\{ \frac{M_j}{R_{j+1}}, \frac{M'_{j+1}}{R'_{j+2}} \right\} = \mu_k. \end{aligned}$$

Now from (25) it follows that the elements of the BFC (2) satisfy the conditions of the Theorem 3.11 [7, p. 85]. This means that the BFC (2) converges.

Finally, by the Theorem 2.2 [7, p. 48], the BFC (2) \mathcal{B} -figured converges. \square

REFERENCES

- [1] Antonova T.M., Bodnar D.I. *Convergence region of branched continued fractions of special form*. Approx. Theor. and its Appl.: Prog. Inst. Math. NAS Ukr. 2000, **31**, 19–32. (in Ukrainian)
- [2] Antonova T.M., Sus O.M. *Necessary conditions of convergence for one class of two-dimensional continued fractions with complex elements*. Approx. Theor. and Rel. Probl.: Pr. Inst. Matem. NAS Ukr. 2015, **12** (4), 8–28. (in Ukrainian)
- [3] Baran O.E. *Some circular regions of convergence for branched continued fractions of a special form*. J. Math. Sci. 2015, **205** (4), 491–500. doi:10.1007/s10958-015-2262-3
- [4] Baran O.E. *Some convergence regions of branched continued fractions of a special form*. Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 4–13. doi:10.15330/cmp.5.1.4-13 (in Ukrainian)
- [5] Bodnar D.I., Bilanyk I.B. *Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements*. Carpathian Math. Publ. 2017, **9** (1), 13–21. doi:10.15330/cmp.9.1.13-21
- [6] Bodnar D.I., Bilanyk I.B. *On convergence of branched continued fractions of the special form in unguar domains*. Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya 2017, **60** (3), 60–69. (in Ukrainian)
- [7] Bodnar D.I. *Branched continued fractions*. Naukova Dumka, Kyiv, 1986. (in Russian)
- [8] Bodnar D.I., Zatorskyi R.A. *Generalization of continued fractions. II*. J. Math. Sci. 2012, **184**, (1), 46–55. doi:10.1007/s10958-012-0851-y
- [9] Bodnar D.I., Kuchminska Kh.Yo. *Development of the theory of branched continued fractions in 1996-2016*. J. Math. Sci. 2016, **231** (4), 481–494. doi:10.1007/s10958-018-3828-7
- [10] Bodnar O.S., Dmytryshyn R.I. *On the convergence of multidimensional S-fractions with independent variables*. Carpathian Math. Publ. 2018, **10** (1), 58–64. doi:10.15330/cmp.10.1.58-64
- [11] Bodnarchuk P.I., Skorobogatko V.Ya. *Branched continued fractions and its application*. Naukova Dumka, Kyiv, 1974. (in Ukrainian)
- [12] de Bruin M.G. *Convergence of Generalized C-fractions*. J. Approx. Theory 1978, **24**, 177–207.
- [13] Dmytryshyn R.I. *Convergence of some branched continued fractions with independent variables*. Mat. Stud. 2017, **47** (2), 150–159. doi:10.15330/ms.47.2.150-159
- [14] Fürsthenau E. *Über Kettenbrüche höherer Ordnung*. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 1876, 133–135. (in German)
- [15] Jones W.B., Thron W.J. *Continued fractions: Analytic theory and applications*. London; Amsterdam; Don Mills; Ontario; Sydney; Tokyo: Addison-Wesley Pub. Co., Inc, 1980.
- [16] Krukovskyi B.V. *On the theory of continued fractions of second class*. J. Inst. Math. NAS Ukr. 1933, **1**, 195–206. (in Ukrainian)

- [17] Kuchminska Kh.Yo. Two-dimensional continued fractions. Pidstryhach Institute for Appl. Probl. in Mech. and Math. NAS of Ukraine, Lviv, 2010. (in Ukrainian)
- [18] Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions. Vol.1: Convergence Theory., 2d ed. Amsterdam: Atlantis Press; World Scientific, 2008.
- [19] Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Bd.II: Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche., 3e aufl. Stuttgart: B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, 1957. (in German)
- [20] Siemaszko W. *Branched continued fractions for double power series*. J. Comput. Appl. Math. 1980., 6 (2), 121–125.
- [21] Skorobogatko V.Ya. The theory of branched continued fractions and its application in computational mathematics. Nauka, Moscow, 1983. (in Russian)

Received 02.05.2019

Біланік І.Б., Боднар Д.І., Буяк А.М. *Зображення відношення розв'язків чотиричленного лінійного рекурентного співвідношення у вигляді гіллястого ланцюгового дробу // Карпатські матем. публ. — 2019. — Т.11, №1. — С. 33–41.*

Відношення двох лінійно незалежних розв'язків чотиричленного лінійного рекурентного співвідношення за аналогією з неперервними дробами представлено у вигляді гіллястого ланцюгового дробу з двома гілками розгалуження. Знайдено формули частинних чисельників та частинних знаменників цього гіллястого ланцюгового дробу. Розв'язки різницевого рівняння є канонічними чисельниками і канонічними знаменниками \mathcal{B} -фігурних підхідних дробів. Часто використовують два типи фігурних підхідних дробів: \mathcal{A} -фігурні і \mathcal{B} -фігурні. n -ий \mathcal{A} -фігурний підхідний дріб гіллястого ланцюгового дробу отримується додаванням наступної частинної частки до $(n - 1)$ -го \mathcal{A} -фігурного підхідного дробу. n -ий \mathcal{B} -фігурний підхідний дріб гіллястого ланцюгового дробу є гіллястий ланцюговий дріб, що є його частиною і містить всі ті елементи, сума індексів яких менша, або рівна n . \mathcal{A} -фігурні підхідні дробу використовуються при доведенні формул для канонічних чисельників і знаменників у вигляді визначників, \mathcal{B} -фігурні підхідні дробу – у задачах відповідності між кратними степеневими рядами і гіллястими ланцюговими дробами. Загальний гіллястий ланцюговий дріб не можна звести до побудованого гіллястого ланцюгового дробу. Для обчислення канонічних чисельників і канонічних знаменників гіллястих ланцюгових дробів з N , $N > 1$, гілками розгалуження не справджуються лінійні рекурентні співвідношення. Досліджена \mathcal{B} -фігурна збіжність побудованого дробу у випадку, коли коефіцієнтами рекурентного співвідношення є дійсні додатні числа.

Ключові слова і фрази: гіллястий ланцюговий дріб, рекурентне співвідношення.

CONTENTS

Ansari A.H., Binbasioglu D., Turkoglu D. <i>Coupled coincidence point results for contraction of C-class mappings in ordered uniform spaces</i>	3
Bandura A.I. <i>Some weaker sufficient conditions of L-index boundedness in direction for functions analytic in the unit ball</i>	14
Zabolotskyi M.V., Basiuk Yu.V. <i>Asymptotics of the entire functions with ν-density of zeros along the logarithmic spirals</i>	26
Bilanyk I.B., Bodnar D.I., Buyak L.M. <i>Representation of a quotient of solutions of a four-term linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction</i>	33
Chernega I., Zagorodnyuk A. <i>Note on bases in algebras of analytic functions on Banach spaces</i>	42
Dmytryshyn M., Lopushansky O. <i>Spectral approximations of strongly degenerate elliptic differential operators</i>	48
Dmytryshyn R.I. <i>On some of convergence domains of multidimensional S-fractions with independent variables</i>	54
Ghosh A. <i>Ricci soliton and Ricci almost soliton within the framework of Kenmotsu manifold</i>	59
Kachanovsky N.A., Kachanovska T.O. <i>Interconnection between Wick multiplication and integration on spaces of nonregular generalized functions in the Lévy white noise analysis</i>	70
Kravtsiv V.V. <i>Algebraic basis of the algebra of block-symmetric polynomials on $\ell_1 \oplus \ell_\infty$</i>	89
Lishchynskyj I.I. <i>The relationship between algebraic equations and (n, m)-forms, their degrees and recurrent fractions</i>	96
Lopushanskyy A., Lopushanska H. <i>Inverse problem for 2b-order differential equation with a time-fractional derivative</i>	107
Noor M.A., Noor K.I., Iftikhar S. <i>Some inequalities for strongly (p, h)-harmonic convex functions</i>	119
Omidi S., Davvaz B., Hila K. <i>Characterizations of regular and intra-regular ordered Γ-semihypergroups in terms of bi-Γ-hyperideals</i>	136
Özarslan H.S. <i>On a new application of quasi power increasing sequences</i>	152
Pryimak H.M. <i>On approximation of homomorphisms of algebras of entire functions on Banach spaces</i>	158
Quan L.T., Van An T. <i>On the solutions of a class of nonlinear integral equations in cone b-metric spaces over Banach algebras</i>	163
Sokhatsky F.M., Tarasevych A.V. <i>Classification of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of the length three</i>	179
Turchyna N.I., Ivasyshen S.D. <i>On integral representation of the solutions of a model $\vec{2}b$-parabolic boundary value problem</i>	193
Lopushansky Oleh — 70 anniversary	204
Kyrychenko Volodymyr Vasylovych (obituary)	206
Berezansky Yuriy Makarovych (obituary)	208

ЗМІСТ

Ансарі А.Г., Бінбасіоглу Д., Туркоглу Д. Результати про зв'язану точку збігу для стискуючих відображень класу S у впорядкованих рівномірних просторах	3
Бандура А.І. Деякі слабші достатні умови обмеженості L -індексу за напрямком для аналітичних в одиничній кулі функцій	14
Заболоцький М.В., Басюк Ю.В. Асимптотика цілих функцій з v -щільністю нулів вздовж логарифмічних спіралей	26
Біланік І.Б., Боднар Д.І., Буяк Л.М. Зображення відношення розв'язків чотиричленного лінійного рекурентного співвідношення у вигляді гіллястого ланцюгового дробу	33
Чернега І., Загороднюк А. Про базиси в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах	42
Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Спектральні апроксимації сильно вироджених еліптичних диференціальних операторів	48
Дмитришин Р.І. Про деякі області збіжності багатовимірних S -дробів з нерівнозначними змінними	54
Гош А. Солітон Річчі і майже солітон Річчі в рамках многовиду Кенмоцу	59
Качановський М.О., Качановська Т.О. Взаємозв'язок між віківським множенням та інтегруванням на просторах нерегулярних узагальнених функцій в аналізі білого шуму Леві	70
Кравців В.В. Алгебраїчний базис алгебри блочно-симетричних поліномів на $\ell_1 \oplus \ell_\infty$	89
Ліщинський І.І. Зв'язок алгебраїчних рівнянь з (n, t) -формами, їх степенями і рекурентними дробами	96
Лопушанський А., Лопушанська Г. Обернена задача для диференціального рівняння порядку $2b$ з дробовою похідною за часом	107
Нур М.А., Нур К.І., Іфтіхар С. Деякі нерівності для сильно (p, h) -гармонійних опуклих функцій	119
Оміді С., Давваз Б., Хіла К. Характеристики регулярних і внутрішньо-регулярних впорядкованих Γ -напівгіпергруп в термінах bi - Γ -гіперідеалів	136
Озарслан Г. Про нове застосування квазі-степеневих зростаючих послідовностей	152
Приймак Г.М. Про наближення гомоморфізмів алгебри цілих функцій на банахових просторах	158
Кван Л.Т., Ван Ан Т. Про розв'язки деякого класу нелінійних інтегральних рівнянь в кінчних b -метричних просторах над банаховими алгебрами	163
Сохацький Ф.М., Тарасевич А.В. Класифікація узагальнених тернарних квадратичних функційних рівнянь довжини три	179
Турчина Н.І., Івасишєн С.Д. Про інтегральне зображення розв'язків модельної $2\vec{b}$ -параболічної крайової задачі	193
Лопушанському Олегу Васильовичу — 70 років	204
Кириченко Володимир Васильович (некролог)	206
Березанський Юрій Макарович (некролог)	208