УДК 517.5
В. Галан, канд. фіз.-мат. наук
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

ПОБУДОВА АПРОКСИМАЦІЙНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ДЛЯ НЕПЕРЕРВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Для неперервно диференційовних на сегменті функцій встановлено структуру многочлена найкращого рівномірного наближення, складено систему рівнянь для знаходження точок чебишевського альтернансу та одержано формулу для аналітичного задання такого многочлена. На основі цих результатів будуються многочлени з близькими до найкращих апроксимаційними властивостями та наводяться оцінки величин відхилення.

Умовні позначення

$\boldsymbol{f}$ — неперервно диференційовна на сегменті $[a;\, b]$ $(a < b)$ функція;

$\boldsymbol{x_0}$ та $\boldsymbol{h}$ — дійсні числа, $h > 0$, до того ж такі, що $\left[x_0;\, x_0 + h\right] \subset \left[a;\, b\right]$;

$\boldsymbol{x}$ — змінна, що належить стандартному сегменту $[0;\, 1]$;

$\boldsymbol{g(x) = f(x_0+xh)}$ — звуження функції f на $[x_0;\, x_0+h]$;

$\boldsymbol{m}$ — довільне натуральне число;

$\boldsymbol{j}$ — індекс, який використовується лише в скорочених записах виразів і завжди вважається, що він послідовно набирає значення від $j = 0$ до $j = m + 1$;

$\boldsymbol{M(\theta_j)}$ — набір із $(m + 2)$ чисел, що задовольняють умову $0 \le \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} \le 1$, тобто $M(\theta_j)$ — кортеж $[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m, \theta_{m+1}]$.

Вступ

У різних розділах математики часто складні математичні об’єкти наближають простішими і, зокрема, неперервні функції апроксимують многочленами (мн.). Задачі ставлять по-різному. Через важливість таких задач їм присвячені дослідження багатьох учених і одержано ряд глибоких і важливих результатів (див., наприклад, [1 – 5]). Функції складної природи (з точки зору обчислення їх значень) апроксимують алгебраїчними мн. і відхилення мн. від функції оцінюють в рівномірній метриці C. Для будь-якої неперервної на сегменті функції існує, і при цьому єдиний, мн. найкращого рівномірного наближення (мн.н.р.н.) (див., наприклад, [2, С. 12], або [3, гл. IV, § 5]). Природним є бажання апроксимувати неперервні функції мн.н.р.н. Але переважно задача про побудову мн.н.р.н. є нерозв’язною ([2, С. 74], див. також початок п. 2 цієї роботи). Тому досить поширеним є використання апроксимаційних многочленів (апр.мн.), які не є мн.н.р.н., але які забезпечують наближення функції із заданою точністю. При знаходженні таких мн. намагаються досягнути наступних цілей: 1) побудований апр.мн. має апроксимаційні властивості, близькі до найкращих; 2) метод побудови мн. має бути простим і ефективним на практиці. Досягнути потрібної точності наближення можна або шляхом підвищення степеня алгебраїчного мн. (коли сегмент заданий), або шляхом розбиття сегмента на кілька частин і побудови на кожному з них «свого» апр.мн. (коли степінь мн. не повинна перевищувати заданого числа). Враховуючи вище сказане, в цій роботі розглядається задача про рівномірне наближення функції g на $[0;\, 1]$.

У відомій авторові літературі відсутня інформація про структуру мн.н.р.н. для функції g. У роботі встановлено структуру такого мн., складено системи рівнянь для знаходження набору $M(g;\, \theta_j)$ точок чебишевського альтернансу для функції g, встановлено формулу для аналітичного задання мн.н.р.н. Крім цього, отримано формулу, що дає змогу аналітично задавати мн. довільного степеня з апроксимаційними властивостями, близькими до найкращих, даються оцінки величин відхилень апр.мн. від функції та вказується алгоритм побудови послідовності мн., апроксимаційні властивості яких покращуються. Наведені приклади переконливо показують ефективність одержаних результатів.

1. Структура мн.н.р.н. для неперервно диференційовної на сегменті функції

Нехай $R_m(g, x_0, h, \theta_j; x) = R_m(g; x) = R_m(x)$ — функція, яка є розв'язком рівняння

$$\begin{vmatrix} g(x)-R_m(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ g(\theta_0) & 1 & \theta_0 & \theta_0^2 & \cdots & \theta_0^m & 1 \\ g(\theta_1) & 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \cdots & \theta_1^m & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g(\theta_{m+1}) & 1 & \theta_{m+1} & \theta_{m+1}^2 & \cdots & \theta_{m+1}^m & (-1)^{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} g(x)-R_m(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ g(\theta_j) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} = 0; \qquad (1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \theta_0 & \theta_0^2 & \cdots & \theta_0^m & 1 \\ 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \cdots & \theta_1^m & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \theta_{m+1} & \theta_{m+1}^2 & \cdots & \theta_{m+1}^m & (-1)^{m+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m \, (-1)^j \end{vmatrix} \qquad (2)$$

— визначник $(m + 2)$ *–го* порядку, складений за набором (кортежом) $M(\theta_j)$.

Розклавши визначник Δ за елементами останнього стовпця, одержимо арифметичну суму ненульових чисел одного знака (значень визначників Вандермонда). Отже, при будь-якому наборі $M(\theta_j)$ визначник $\Delta \neq 0$ і функція $R_m(x)$ задається рівнянням (1) однозначно, при цьому

$$R_m(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} g(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ g(\theta_j) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} = g(x) - p_m(x), \qquad (3)$$

$$\text{де } p_m(x) = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ g(\theta_j) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} \qquad (4)$$

— алгебраїчний мн. степеня $\leq m$. Крім цього, при кожному $i \in 0,1,2,...,m$ в силу (3)

$$R_m(\theta_i) + R_m(\theta_{i+1}) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} g(\theta_i)+g(\theta_{i+1}) & 2 & \theta_i+\theta_{i+1} & \theta_i^2+\theta_{i+1}^2 & \cdots & \theta_i^m+\theta_{i+1}^m & 0 \\ g(\theta_j) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

(бо перший рядок визначника є сумою двох інших сусідніх рядків цього визначника).

Ураховуючи прийняті позначення, рівності (5) та теорему Чебишева про мн.н.р.н. ([1], див. також [2, С. 12] чи [3, С. 226]), робимо висновок, що заданий співвідношенням (4) мн. $p_m(x)$ буде мн.н.р.н. функції g, якщо при його побудові буде використано набір $M(g;\theta_j)$ такий, що при кожному θ_i

$$|g(\theta_i) - p_m(\theta_i)| = |R_m(\theta_i)| = \max_{x\in 0;1} |g(x) - p_m(x)|.$$

Оскільки $R_m(x)$ — диференційовна функція, то при всіх $\theta_i \in 0;1$ $R'_m(\theta_i) = 0$ і коли набір $M(\theta_j)$ є набором $M(g;\theta_j)$, то ще виконуватиметься рівність

$$|g(\theta_0) - p_m(\theta_0)| = \max_{x\in 0;1} |g(x) - p_m(x)|.$$

Таким чином, доведено справедливість наступного твердження.

Теорема (про структуру мн.н.р.н.). Для будь-якої неперервно диференційовної на сегменті $[x_0; x_0+h]$ функції f при довільному натуральному m її мн.н.р.н. можна задати співвідношенням:

$$p_m(f;x) = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ f(x_0+\theta_j h) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix},$$

в якому числа θ_j набору $M(f;\ \theta_j)$ такі, що при кожному $\theta_i \in\ 0;1$ мають місце рівності:

$$\begin{vmatrix} f'(x_0+\theta_i h)h & 0 & 1 & 2\theta_i & \cdots & m\theta_i^{m-1} & 0 \\ f(x_0+\theta_j h) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

і, крім цього, буде правильна рівність:

$$\left| f(x_0+\theta_0 h) - p_m(f;\theta_0) \right| = \max_{x\in\ 0;1}\left| \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f(x_0+xh) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ f(x_0+\theta_j h) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} \right|.$$

Зауваження. 1. Коли $f^{\ m+1}\ (x_0+xh) \neq 0,\ x \in\ 0;1$, то набір $M(f;\ \theta_j)$ єдиний, до того ж $\theta_0 = 0$, $\theta_{m+1} = 1$ (див., напр. [4, задача 20, С. 151–152]). Отже, числа $\theta_i \in\ 0;1$ набору $M(f;\ \theta_j)$ мають утворювати точку $\ \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m\ \in R^m$, яка є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'(x_0+\theta_1 h)h & 0 & 1 & 2\theta_1 & \cdots & m\theta_1^{m-1} & 0 \\ f(x_0+\theta_j h) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad ... \\ \begin{vmatrix} f'(x_0+\theta_m h)h & 0 & 1 & 2\theta_m & \cdots & m\theta_m^{m-1} & 0 \\ f(x_0+\theta_j h) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

2. Оскільки набір $M(f;\theta_j)$ є набором точок чебишевського альтернансу, то величина найкращого рівномірного наближення многочленами функції f на сегменті $[x_0;\ x_0+h]$, тобто число $E_m(f) = \inf\limits_{p_m(x)} \max\limits_{x\in\ 0;1}\left| f(x_0+xh) - p_m(x) \right|$ обчислюється за формулою

$$E_m(f) = \left| \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f(x_0+\theta_0 h) & 1 & \theta_0 & \theta_0^2 & \cdots & \theta_0^m & 0 \\ f(x_0+\theta_j h) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} \right|.$$

2. Побудова многочленів довільних степенів з близькими до найкращих апроксимаційними властивостями

Рівняння виду (6) є дуже складними (найчастіше трансцендентними) і знайти набір $M(f;\theta_j)$ практично неможливо. Цим і пояснюється нерозв'язність задачі про побудову мн.н.р.н.

Нехай $g(x)$ — функція, яка має неперервні похідні до $(m + 2)$ *–го* порядку включно. Тоді, використавши формулу Тейлора, при кожному $i \in\ 0,1,2,...,m+1$ матимемо рівності: $g(\theta_i) = \sum\limits_{k=0}^{m+2} \beta_k(0)\theta_i^k + o\ \ \theta_i h^{\ m+2}$, $g'(\theta_i) = \sum\limits_{k=0}^{m+2} k\beta_k(0)\theta_i^{k-1} + o\ \ h^{m+2}\theta_i^{m+1}$, $\left(\beta_k(0) = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k \right)$ і рівняння (6) можна переписати так:

$$\beta_{m+1}(0)\begin{vmatrix} (m+1)\theta_i^m & 0 & 1 & 2\theta_i & \cdots & m\theta_i^{m-1} & 0 \\ \theta_j^{m+1} & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} +$$
$$+\beta_{m+2}(0)\begin{vmatrix} (m+2)\theta_i^{m+1} & 0 & 1 & 2\theta_i & ... & m\theta_i^{m-1} & 0 \\ \theta_j^{m+2} & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & ... & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} + \qquad (7)$$
$$+\begin{vmatrix} o\ \ h^{m+2}\theta_i^{m+1} & 0 & 1 & 2\theta_i & \cdots & m\theta_i^{m-1} & 0 \\ o\ \ h\theta_j^{\ \ m+2} & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} = 0.$$

У цих рівняннях головними є перші доданки. Прирівняємо їх до нуля і отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2\theta_0 & 3\theta_0^2 & \cdots & (m+1)\theta_0^m \\ (-1)^j & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \theta_j^3 & \cdots & \theta_j^{m+1} \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2\theta_1 & 3\theta_1^2 & \cdots & (m+1)\theta_1^m \\ (-1)^j & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \theta_j^3 & \cdots & \theta_j^{m+1} \end{vmatrix} = 0, \\ \cdots \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2\theta_{m+1} & 3\theta_{m+1}^2 & \cdots & (m+1)\theta_{m+1}^m \\ (-1)^j & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \theta_j^3 & \cdots & \theta_j^{m+1} \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Розв’язком системи (8) є точка $\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m, \theta_{m+1}$, де

$$\theta_j = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{j\pi}{m+1}\right). \qquad (9)$$

Справді, вважаючи $g(x) = x^{m+1}$, ми бачимо, що при будь-якому наборі $M(\theta_j)$ задана рівнянням (3) функція $R_m(x)$ є мн. степеня $m+1$ із старшим коефіцієнтом 1. Коли ж набір $M(\theta_j)$ такий, що побудований з використанням співвідношення (4) мн. $p_m(x)$ буде мн.н.р.н. для функції $g(x) = x^{m+1}$, то $R_m(x)$ буде найменше відхилятись від нуля на [0; 1], тобто $R_m(x) = \frac{1}{2^{2m+1}} T_{m+1}(2x-1)$, де $T_{m+1}(2x-1) = \cos((m+1)\arccos(2x-1))$ — зміщений многочлен Чебишева [5]. Екстремальні значення мн. $T_{m+1}(2x-1)$ досягає в точках θ_j, для яких $2\theta_j - 1 = \cos(\pi - \frac{j\pi}{m+1})$, звідки і отримаємо (9).

У літературі, де розглядається побудова апр.мн., рекомендується брати $M\left(\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{j\pi}{m+1}\right)\right)$ (див. [2, С. 43] та [3, С. 229–230]). Наведені вище міркування показують, що для цих рекомендацій є вагомі підстави, тим більше, що числа θ_j такого набору не залежать від індивідуальних властивостей функції $g(x)$. Коли ж при складанні системи рівнянь виду (8) брати перших два доданки в рівняннях (7), то система стає значно складнішою і числа θ_j вже залежатимуть від властивостей функції $g(x)$.

Величиною відхилення $p_m(x)$ від $g(x)$ є

$$\max_{x\in 0;1} |R_m(x)| = \max_{x\in 0;1} \left| \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} g(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ g(\theta_j) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix} \right|.$$

Дамо ще асимптотичну оцінку величини $\max_{x\in 0;1} |R_m(x)|$ у випадку $(m+2)$ рази неперервно диференційовної функції f. Використавши формулу $f(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(th)^k + \frac{f^{(m+2)}(x_0 + \nu h)}{(m+2)!}(th)^{m+2}$, $\nu \in (0;1)$ і рівність (3), отримаємо

$$R_m(x)=\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}h^{m+1}\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x^{m+1} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ \theta_j^{\,m+1} & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dfrac{f^{(m+2)}(x_0+\lambda h)}{(m+2)!}h^{m+2}x^{m+2} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ \dfrac{f^{(m+2)}(x_0+\mu_j h)}{(m+2)!}h^{m+2}\theta_j^{m+2} & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}h^{m+1}\frac{1}{2^{2m+1}}T_{m+1}(2x-1)+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dfrac{f^{(m+2)}(x_0+\lambda h)}{(m+2)!}h^{m+2}x^{m+2} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & 0 \\ \dfrac{f^{(m+2)}(x_0+\mu_j h)}{(m+2)!}h^{m+2}\theta_j^{m+2} & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix},$$

де λ, $\mu_j \in (0;\, 1)$. Отже, $\max\limits_{x\in[0;1]}\left|R_m(x)\right|=\dfrac{\left|f^{(m+1)}(x_0)\right|}{(m+1)!}h^{m+1}\dfrac{1}{2^{2m+1}}+o\left(\dfrac{h^{m+1}}{(m+1)!}\dfrac{1}{2^{2m+1}}\right).$

3. Поліпшення апроксимаційних властивостей многочленів, заданих рівністю (4)

Нехай $\theta_{j_0}=\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{j\pi}{m+1}\right)$. Мн. $p_m(x)$, побудований за співвідношенням (4) і набором $M(\theta_{j_0})$ здебільшого не буде мн.н.р.н. Вкажемо алгоритм поліпшення апроксимаційних властивостей мн. $p_m(x)$.

Ураховуючи (3), отримаємо:

$$R_m'(x)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} g'(x) & 0 & 1 & 2x & \cdots & mx^{m-1} & 0 \\ g(\theta_j) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix}.$$

Якщо набір $M(g;\theta_j)$ складений із точок чебишевського альтернансу, то $R_m'(\theta_i)=0$ при кожному $\theta_i\in[0;1]$, тобто

$$\begin{vmatrix} g'(\theta_i) & 0 & 1 & 2\theta_i & \cdots & m\theta_i^{m-1} & 0 \\ g(\theta_j) & 1 & \theta_j & \theta_j^2 & \cdots & \theta_j^m & (-1)^j \end{vmatrix}=\Phi(\theta_i;\theta_j)=0.$$

Якщо функція $g(x)$ має неперервну похідну другого порядку, то функція $\Phi(\theta_i;\theta_j)$, як функція точки $(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m,\theta_{m+1})\in R^{m+2}$ буде диференційовною.

Суть алгоритму проілюструємо на наступному прикладі. Розглянемо один із можливих випадків: нехай в наборі $M(g;\theta_j)$ $\theta_0>0$, $\theta_{m+1}=1$. Тоді

$$\Phi(\theta_i;\theta_j)=\begin{vmatrix} g'(\theta_i) & 0 & 1 & 2\theta_i & \ldots & m\theta_i^{m-1} & 0 \\ g(\theta_0) & 1 & \theta_0 & \theta_0^2 & \ldots & \theta_0^m & 1 \\ g(\theta_1) & 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \ldots & \theta_1^m & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g(\theta_m) & 1 & \theta_m & \theta_m^2 & \ldots & \theta_m^m & (-1)^m \\ g(1) & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & (-1)^{m+1} \end{vmatrix}.$$

Вважаючи, що $\theta_i=\theta_{i_0}+\lambda_{i_0}$ $i\in\{0,1,2,\ldots,m\}$ та враховуючи диференційовність $\Phi(\theta_i;\theta_j)$, матимемо $(m+1)$–*е* наближене рівняння виду:

$$0=\Phi(\theta_i;\theta_j)\approx\Phi(\theta_{i_0};\theta_{j_0})+\frac{\partial\Phi(\theta_{i_0};\theta_{j_0})}{\partial\theta_0}\lambda_{0_0}+\frac{\partial\Phi(\theta_{i_0};\theta_{j_0})}{\partial\theta_1}\lambda_{1_0}+\ldots+\frac{\partial\Phi(\theta_{i_0};\theta_{j_0})}{\partial\theta_m}\lambda_{m_0}.$$

Розв'язавши відповідну систему лінійних (відносно λ_{i_0}) рівнянь, покладемо $\theta_i=(\theta_{i_0}+\lambda_{i_0})+\lambda_{i_1}=\theta_{i_1}+\lambda_{i_1}$. За набір $M(\theta_j)$ візьмемо $M(\theta_{i_1})$ $(\theta_{(m+1)_1}=1)$ і повторимо потрібну кількість раз ці міркування. Зупинившись на певному етапі, ми отримаємо набір $M(\theta_{j_k})$, який дає змогу побудувати мн. з апроксимаційними властивостями, близькими до найкращих. Випадки, коли $\theta_0>0$, $\theta_{m+1}=1$; $\theta_0=0$, $\theta_{m+1}<1$ та $0<\theta_0<\theta_{m+1}<1$, розглядаються аналогічно.

4. Приклади побудови апроксимаційних многочленів

Наведемо приклади побудови многочленів з використанням математичної системи символьних обчислень Mathematica.

Побудова апроксимаційного многочлена четвертого степеня для функції $f(x_0+xh)=e^{x_0+xh}$ у випадку $x_0=0, h=1, x\in[0;1]$.

1. Початкові дані: M, Δ — матриці визначника правої частини (4) та визначника (2), $\theta_0-\theta_5$ — точки чебишевського альтернансу (9).

```
f[x_] := E^x
M = {{0, 1, x, x^2, x^3, x^4, 0},
  {f[θ0*h], 1, θ0, θ0^2, θ0^3, θ0^4, 1},
  {f[θ1*h], 1, θ1, θ1^2, θ1^3, θ1^4, -1},
  {f[θ2*h], 1, θ2, θ2^2, θ2^3, θ2^4, 1},
  {f[θ3*h], 1, θ3, θ3^2, θ3^3, θ3^4, -1},
  {f[θ4*h], 1, θ4, θ4^2, θ4^3, θ4^4, 1},
  {f[θ5*h], 1, θ5, θ5^2, θ5^3, θ5^4, -1}}

Δ = {{1, θ0, θ0^2, θ0^3, θ0^4, 1},
  {1, θ1, θ1^2, θ1^3, θ1^4, -1},
  {1, θ2, θ2^2, θ2^3, θ2^4, 1},
  {1, θ3, θ3^2, θ3^3, θ3^4, -1},
  {1, θ4, θ4^2, θ4^3, θ4^4, 1},
  {1, θ5, θ5^2, θ5^3, θ5^4, -1}}

θ0 = 1/2*(1 - Cos[0*π/5])    θ2 = 1/2*(1 - Cos[2*π/5])    θ4 = 1/2*(1 - Cos[4*π/5])
θ1 = 1/2*(1 - Cos[1*π/5])    θ3 = 1/2*(1 - Cos[3*π/5])    θ5 = 1/2*(1 - Cos[5*π/5])
```

2. За формулою (4) побудовано апроксимаційний многочлен четвертого степеня $p_4(x)$для функції e^x.

```
P4 = -1/DD*Det[M] // N

1048.58 (0.0009537 + 0.000952421 x + 0.000486505 x^2 + 0.000133228 x^3 + 0.0000664752 x^4)
```

3. Побудовано графік різниці $R_4(x)$ між функцією e^x і многочленом $p_4(x)$ (рис. 1).

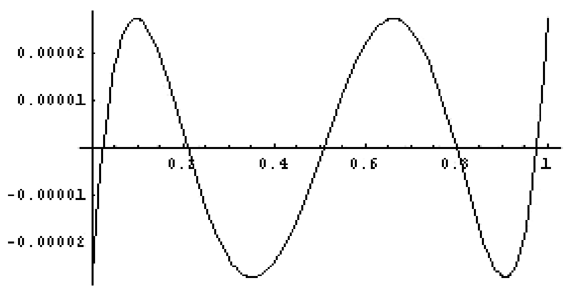

Рис. 1. Графік різниці $R_4(x)$

4. Обчислені значення різниці $R_4(x)$ в точках чебишевського альтернансу.

$$\mathbf{E}^{\theta0*h} - \mathbf{PP4}[\theta0] \;//\; \mathbf{N} \qquad \mathbf{E}^{\theta2*h} - \mathbf{PP4}[\theta2] \;//\; \mathbf{N} \qquad \mathbf{E}^{\theta4*h} - \mathbf{PP4}[\theta4] \;//\; \mathbf{N}$$

```
-0.0000271154          -0.0000271154          -0.0000271154
```

$$\mathbf{E}^{\theta1*h} - \mathbf{PP4}[\theta1] \;//\; \mathbf{N} \qquad \mathbf{E}^{\theta3*h} - \mathbf{PP4}[\theta3] \;//\; \mathbf{N} \qquad \mathbf{E}^{\theta5*h} - \mathbf{PP4}[\theta5] \;//\; \mathbf{N}$$

```
0.0000271154          0.0000271154          0.0000271154
```

5. Побудовано графіки функції e^x та апроксимаційного многочлена $p_4(x)$ на сегменті [0; 4] (рис. 2).

```
Plot[{f[X0 + x * h], P4[x]}, {x, 0, 4}]
```

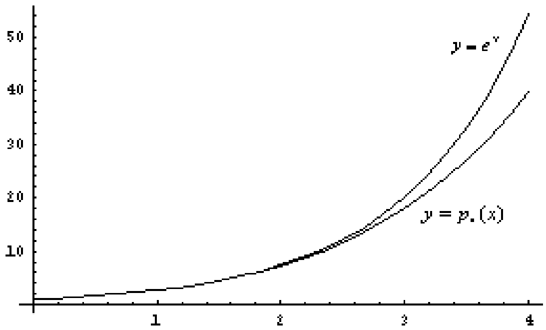

Рис. 2. Графіки функції e^x та апроксимаційного многочлена $p_4(x)$

Побудова апроксимаційного многочлена п'ятого степеня для функції $f(x_0 + xh) = \sin(x_0 + xh)$ у випадку $x_0 = 0, h = 1, x \in 0;1$.

1.

```
f[x_] := Sin[x];
M = {{0, 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, 0},
  {f[θ0 * h], 1, θ0, θ0^2, θ0^3, θ0^4, θ0^5, 1},
  {f[θ1 * h], 1, θ1, θ1^2, θ1^3, θ1^4, θ1^5, -1},
  {f[θ2 * h], 1, θ2, θ2^2, θ2^3, θ2^4, θ2^5, 1},
  {f[θ3 * h], 1, θ3, θ3^2, θ3^3, θ3^4, θ3^5, -1},
  {f[θ4 * h], 1, θ4, θ4^2, θ4^3, θ4^4, θ4^5, 1},
  {f[θ5 * h], 1, θ5, θ5^2, θ5^3, θ5^4, θ5^5, -1},
 {f[θ6 * h], 1, θ6, θ6^2, θ6^3, θ6^4, θ6^5, 1}}

A = {{1, θ0, θ0^2, θ0^3, θ0^4, θ0^5, 1},
  {1, θ1, θ1^2, θ1^3, θ1^4, θ1^5, -1},
  {1, θ2, θ2^2, θ2^3, θ2^4, θ2^5, 1},
  {1, θ3, θ3^2, θ3^3, θ3^4, θ3^5, -1},
  {1, θ4, θ4^2, θ4^3, θ4^4, θ4^5, 1},
  {1, θ5, θ5^2, θ5^3, θ5^4, θ5^5, -1},
  {1, θ6, θ6^2, θ6^3, θ6^4, θ6^5, 1}}
```

$$\theta0 = \frac{1}{2} * \left(1 - \mathrm{Cos}\left[\frac{0*\pi}{6}\right]\right) \quad \theta2 = \frac{1}{2} * \left(1 - \mathrm{Cos}\left[\frac{2*\pi}{6}\right]\right) \quad \theta4 = \frac{1}{2} * \left(1 - \mathrm{Cos}\left[\frac{4*\pi}{6}\right]\right)$$

$$\theta1 = \frac{1}{2} * \left(1 - \mathrm{Cos}\left[\frac{1*\pi}{6}\right]\right) \quad \theta3 = \frac{1}{2} * \left(1 - \mathrm{Cos}\left[\frac{3*\pi}{6}\right]\right) \quad \theta5 = \frac{1}{2} * \left(1 - \mathrm{Cos}\left[\frac{5*\pi}{6}\right]\right) \quad \theta6 = \frac{1}{2} * \left(1 - \mathrm{Cos}\left[\frac{6*\pi}{6}\right]\right)$$

2.

$$\mathbf{P5} = \frac{-1}{\mathbf{DD}} * \mathbf{Det}[\mathbf{M}] \;//\; \mathbf{N}$$

$$-179376.\ (-1.79644\times10^{-12} - 5.57474\times10^{-6}\,x - 1.36705\times10^{-9}\,x^2 + 9.3457\times10^{-7}\,x^3 - 9.2617\times10^{-9}\,x^4 - 4.02871\times10^{-8}\,x^5)$$

3.

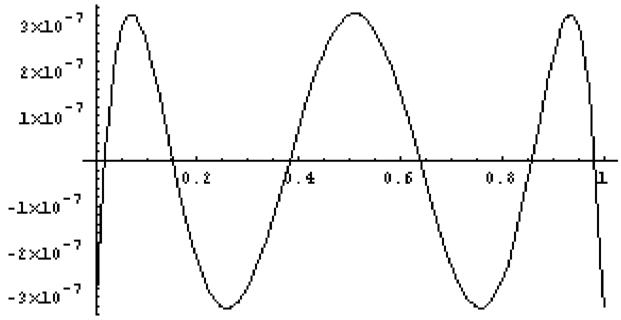

Рис. 3. Графік різниці $R_5(x)$

4.

`Sin[θ0] - f[θ0]` -3.2224×10^{-7} `Sin[θ2] - f[θ2]` -3.2224×10^{-7} `Sin[θ4] - f[θ4]` -3.2224×10^{-7}

`Sin[θ1] - f[θ1]` 3.2224×10^{-7} `Sin[θ3] - f[θ3]` 3.2224×10^{-7} `Sin[θ5] - f[θ5]` 3.2224×10^{-7} `Sin[θ6] - f[θ6]` -3.2224×10^{-7}

5.

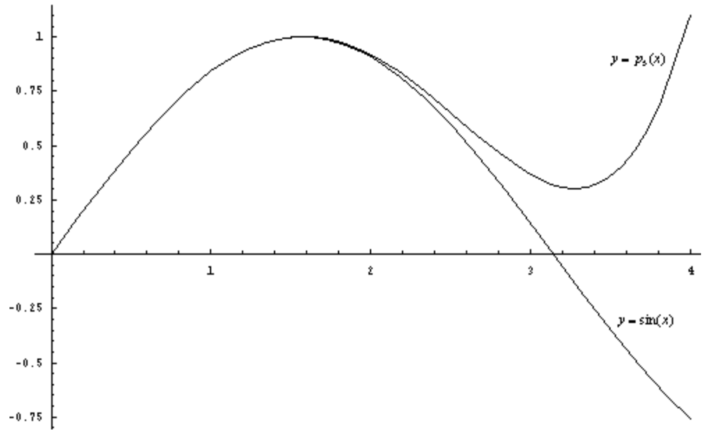

Рис. 4 Графіки функції $\sin(x)$ та апроксимаційного многочлена $p_5(x)$

Висновки

1. У роботі встановлено структуру многочлена найкращого рівномірного наближення для неперервно диференційовних на сегменті функцій та складено системи рівнянь для знаходження точок чебишевського альтернансу.
2. Одержано формулу для аналітичного задання многочлена найкращого рівномірного наближення довільного степеня.
3. Знайдено формулу для ефективної побудови многочленів з хорошими апроксимаційними властивостями та алгоритм для поліпшення цих властивостей.
4. У випадку $m+2$ рази неперервно диференційовної функції отримано асимптотичну оцінку величини максимального відхилення многочленів від вказаної функції.
5. Приклади, наведені в роботі, свідчать про ефективність застосування побудованих многочленів.

For functions that are differentiable on a segment, we have specified the structure of the polynomial of best uniform approximation; we have made up a system of equations to find the points of Chebyshev's alternation and we have received a formula for defining such a polynomial analytically. On the basis of these results, polynomials with almost best approximation properties are built and the degree of deviation is estimated.

Література

1. Чебишев П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. Полн. собрание сочинений. – Изд. АН СССР, М. – Л., 1948. – Т. 2. – С. 23–51.
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
4. Коллатц Л., Альбрехт Ю. Задачи по прикладной математике: Пер. с нем. — М.: Мир, 1978. – 168 с.
5. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева: Пер. с польск. – М.: Наука, 1983. – 384 с.