

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ  
МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ**



**MODERN PROBLEMS  
OF MECHANICS AND MATHEMATICS**

Національна академія наук України  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача

# **Сучасні проблеми механіки та математики**

Збірник наукових праць

*За загальною редакцією  
академіка НАН України А.М. Самойленка  
та академіка НАН України Р.М. Кушніра*

**Том 3**

Львів – 2018

УДК 539.3; 510(061)

**Сучасні проблеми механіки та математики:** збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 3. – Режим доступу до ресурсу: [www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018](http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018)

Збірник наукових праць складається з трьох томів. Перший та другий томи збірника містять наукові праці, присвячені проблемам математичного моделювання у механіці деформівних твердих тіл; математичних методів механіки та термомеханіки; механіки неоднорідних твердих тіл і наномеханіки; механіки контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями; динаміки неоднорідних середовищ; оптимізації та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем; міцності та втоми матеріалів. Третій том присвячено сучасним проблемам математики: зокрема, алгебри і топології, теорії функцій і функціонального аналізу, числових методів, диференціальних рівнянь і математичної фізики. Вони були предметом обговорення на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», яка проходила 22-25 травня 2018 р. у Львові.

Для наукових працівників, докторантів, аспірантів, магістрів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

#### **Редакційна колегія:**

**Головний редактор** академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. *Р.М. Кушнір*

**Заступники** д.ф.-м.н., проф. *О.Р. Гачкевич*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *В.О. Пелих*, д.ф.-м.н., проф. *Г.Т. Сулим*

**Відповідальні секретарі** к.ф.-м.н., ст.н.с. *В.С. Пакош*, к.ф.-м.н. *Н.М. Івасько*, к.ф.-м.н. *Н.С. Джалюк*

**Члени редколегії** академіки НАН України: д.ф.-м.н., проф. *В.Т. Грінченко*, д.ф.-м.н., проф. *З.Т. Назарчук*, д.т.н., проф. *В.В. Панасюк*; члени-кореспонденти НАН України: д.т.н., проф. *О.С. Андрейків*, д.т.н., проф. *В.С. Гудрамович*, д.ф.-м.н., проф. *Г.С. Кіт*; д.ф.-м.н., проф. *М.М. Войтович*, д.ф.-м.н., проф. *А.В. Загороднюк*, д.ф.-м.н., проф. *Я.О. Жук*, д.ф.-м.н., проф. *К.Б. Казарян*, д.ф.-м.н., проф. *П.І. Каленюк*, д.ф.-м.н., проф. *П.П. Костробій*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Я.І. Кунець*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Х.Й. Кучмінська*, д.ф.-м.н., проф. *В.В. Лобода*, д.ф.-м.н., проф. *Р.М. Мартиняк*, д.ф.-м.н., проф. *М.В. Марчук*, д.ф.-м.н., проф. *В.В. Михаськів*, д.т.н., проф. *В.В. Можаровський*, д.ф.-м.н., проф. *М.М. Николишин*, д.ф.-м.н., проф. *В.М. Петричкович*, д.ф.-м.н., проф. *В.Я. Підстригач*, д.ф.-м.н., проф. *В.Г. Попов*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Б.В. Процюк*, д.т.н., ст.н.с. *Я.Д. П'яничо*, д.ф.-м.н., проф. *М.П. Саврук*, д.ф.-м.н., проф. *Я.Г. Савула*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Ю.В. Токовий*, д.ф.-м.н., проф. *В.Ф. Чекурін*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *А.В. Ясінський*

**Рецензенти:** *І.М. Дмитрах*, член-кореспондент НАН України, д.т.н., проф., *М.М. Зарічний*, д.ф.-м.н., проф., *Є.Я. Чапля*, д.ф.-м.н., проф.

#### **Ухвалено до друку**

Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

National Academy of Sciences of Ukraine  
Pidstryhach Institute for Applied Problems  
of Mechanics and Mathematics

# **Modern Problems of Mechanics and Mathematics**

Collection of scientific papers

*Edited by*

*Academician of NAS of Ukraine A.M. Samoilenko  
and Academician of NAS of Ukraine R.M. Kushnir*

**Volume 3**

L'viv – 2018

UDC 539.3; 510(061)

**Modern problems of Mechanics and Mathematics:** collection of scientific papers in 3 vol. / Edited by A.M. Samoilenko, R.M. Kushnir [Electronic resource] // Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine. – 2018. – Vol. 3. – Access mode: [www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018](http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018).

The collection of proceedings contains three volumes. The first and second volumes deal, basically, with such problems: mathematical modelling in mechanics of deformable solids, mathematical methods of mechanics and thermomechanics; mechanics of non-homogeneous solids and nanomechanics, mechanics of contact interaction, solids with cracks and thin inclusions; dynamic problems of non-homogeneous environments; optimization and design of elements of the constructions and biomechanics systems, strength and fatigue of materials. The third volume is devoted to modern problems of mathematics, partially, numerical methods, theory of functions and functional analysis, theory of functions and functional analysis, differential equations and mathematical physics, algebra, geometry and topology. They were the subject for discussion on International Conference «Modern Problems of Mechanics and Mathematics», held on May 22-25, 2018, L'viv.

The book may be useful to scientists, to those working for a doctor's degree, post-graduate students, masters and students of corresponding specialties.

#### **Editorial board**

**Editor-in-chief** *R.M. Kushnir*

**Vice-editors-in-chief** *O.R. Hachkevych, V.O. Pelykh, H.T. Sulym*

**Senior secretaries** *V.S. Pakosh, N.M. Ivas'ko, N.S. Dzhaliiuk*

**International Editorial Board** *O.Ye. Andreikiv, V.F. Chekurin, K.B. Ghazaryan, V.S. Hudramovych, V.T. Hrinchenko, P.I. Kalenyuk, H.S. Kit, P.P. Kostrobyi, Kh.Yo. Kuchmins'ka, Ya.I. Kunets, V.V. Loboda, M.V. Marchuk, R.M. Martynyak, V.V. Mozharovs'kyy, V.V. Mykhas'kiv, Z.T. Nazarchuk, M.M. Nykolshyn, V.V. Panasyuk, V.M. Petrychkovych, V.Ya. Pidstryhach, V.H. Popov, B.V. Protsyuk, Ya.D. Pyanylo, M.P. Savruk, Ya.H. Savula, M.M. Voitovych, Yu.V. Tokovyy, A.V. Yasins'kyy, A.V. Zagorodnyuk, Ya.O. Zhuk*

**Reviewers:** *Ye.Ya. Chaplya,  
I.M. Dmytrakh,  
M.M. Zarichnyy*

#### **Approved for publishing**

by the Academic Council of Pidstryhach Institute for Applied Problems  
of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

ISBN 978-966-02-8502-6 (common, electronic edition)  
ISBN 978-966-02-8505-7 (v. 3)

© Pidstryhach Institute for Applied Problems  
of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА

<b>Атамась Іван</b> Формула Лиувілля-Остроградського для некоторых классов дифференциальных уравнений с производной Хукухары .	90
<b>Баранецький Ярослав, Каленюк Петро</b> Крайова задача з умовами типу Неймана для рівнянь із частинними похідними з постійними коефіцієнтами.....	92
<b>Баранецький Ярослав, Сохан Петро</b> Нелокальна крайова задача з кратним спектром для звичайного диференціального рівняння парного порядку з оператором інволюції.....	94
<b>Бешлей Василь, Петрук Олег</b> Числове моделювання поляризаційних карт залишків наднових зір.....	96
<b>Вансєва Олена</b> Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку.....	97
<b>Васюник Зоряна</b> Особливості галуження розв'язків системи реакції-дифузії з експоненційними нелінійностями.....	99
<b>Возняк Ольга, Мединський Ігор</b> Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині.....	101
<b>Войтович Михайло</b> Поточкова оцінка розв'язків квазілінійних рівнянь четвертого порядку з підсиленою еліптичністю в термінах потенціала Вольфа.....	103
<b>Гентош Оксана, Прикарпатський Ярема</b> Інтегровні суперконформні аналоги редукцій рівняння Алонсо-Шабата та рівнянь типу Ліувілля.....	105
<b>Герасименко Віктор, Кречко Вікторія</b> Процес поширення початкових квантових кореляцій в границі самоузгодженого поля.....	107
<b>Геселева Катерина</b> Сумісність та побудова наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями.....	108
<b>Грод Іван</b> Знакозмінні функції Ляпунова для розширень динамічних систем на многовидах.....	110
<b>Гузик Надія</b> Визначення невідомих параметрів у параболічному рівнянні з довільним слабким виродженням.....	113
<b>Дем'яненко Анатолій</b> Динаміка пружних об'єктів з рухомих інерційним навантаженням – механічні, математичні моделі, їх особливості та методи дослідження.....	114

## ЗНАКОЗМІННІ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА ДЛЯ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА МНОГОВИДАХ

Іван Грод

*Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка*

[igrod@ukr.net](mailto:igrod@ukr.net)

Одним із важливих питань в якісній теорії диференціальних рівнянь є знаходження умов збереження інваріантних многовидів при збуреннях [1]. Ця задача тісно зв'язана з властивостями певного виду систем лінеаризованих за частиною змінних. Такі системи диференціальних рівнянь в теперішній час прийнято називати лінійним розширенням динамічної системи. Якщо праві частини таких систем є періодичними залежними від багатьох змінних, то їх прийнято називати лінійними розширеннями динамічної системи на торі. Важливим завданням для таких систем є вивчення питання існування функції Гріна, у випадку багатовимірного тору функції Гріна-Самойленка [1]. Виявляється [2], існування функції Гріна є тісно зв'язаним з теорією функцій Ляпунова. Такі функції розглядаються у вигляді квадратичних форм, які не тільки можуть змінювати знак, а й вироджуватись у певних точках. При цьому їх похідна в силу лінійного розширення є знаковизначеною. Часто лінійне розширення має єдину функцію Гріна, а функцій Ляпунова завжди існує безліч. Зв'язок між матрицями проєктування в структурі функції Гріна і функціями Ляпунова і дотепер не слабо досліджений. Запропонована доповідь присвячена цьому питанню.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y, \quad (1)$$

де  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  – вектор-функція, визначена при всіх  $x \in \mathbb{R}^m$ , локально задовольняє умові Ліпшиця. Крім того, будемо припускати, що вектор-функція  $f(x)$  задовольняє нерівності  $\|f(x)\| \leq \alpha_1 \|x\| + \alpha_2$  при всіх  $x \in \mathbb{R}^m$  з деякими невід'ємними сталими  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Простір таких функцій  $f(x)$  коротко будемо позначати через  $C_{Lip}(\mathbb{R}^m)$

Приведені припущення дозволяють стверджувати, що задача Коші  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ,

$x|_{t=0} = x_0$  має єдиний розв'язок  $x = x(t; x_0)$  для кожного фіксованого  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  і цей розв'язок визначений при всіх  $t \in \mathbb{R}$ . Матриця  $A(x)$  в системі (1) є квадратною  $n \times n$ -вимірною, елементами якої є дійсні скалярні функції, визначені, неперервні і обмежені на  $\mathbb{R}^m$ .

Будемо надалі використовувати наступні позначення:  $\Omega_t^t(x)$  – фундаментальна матриця розв'язків лінійної системи  $\frac{dy}{dt} = A(x(t; x))y$  нормована в точці  $t = \tau$ :  $\Omega_\tau^t(x)|_{t=\tau} = I_n$ ,  $C'(\mathbb{R}^m; f)$  – підпростір простору  $C^0(\mathbb{R}^m)$  таких функцій  $F(x)$ , що суперпозиція  $F(x(t; x))$  як функція змінної  $t$  є неперервно диференційовною, причому за означенням  $\frac{d}{dt} F(x(t; x))|_{t=0} = \overset{df}{\dot{F}}(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ .

**Означення.** Нехай існує  $n \times n$ -вимірна матриця  $C(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$  така, що для функції вигляду

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)C(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x)[C(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \quad (2)$$

виконуться оцінка

$$\|G_0(\tau, x)\| \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\} \quad (3)$$

з деякими додатними сталими  $K, \gamma$ . Тоді функцію (2) прийнято називати функцією Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди системи (1).

**Теорема 1.** Нехай система (1) має єдину функцію Гріна (2) з оцінкою (3), тоді кожна симетрична матриця  $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ , для якої виконується умова  $\langle [\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x)]y, y \rangle \geq \|y\|^2$ , буде задовольняти нерівність:

$$\langle S(x)y, [I_n - 2C(x)]y \rangle \geq \beta \|y\|^2,$$

$$\text{де } \beta = \frac{1}{2\|A + A^T\|_0}, \quad \|A + A^T\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|A(x) + A^T(x)\|.$$



1. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L.* Dichotomies and Stability in Nonautonomous Linear Systems // Taylor& Francis Inc, London, 2003. – 367 с.
2. *Грод І. М., Кулик В. Л.* Про зв'язок функції Гріна і Ляпунова в лінійних розширеннях динамічних систем // Укр.мат.журн., – 2014. – **66**, №4. – С. 551–557.

**THE USE SIGN-VARIABLES FUNCTIONS OF LIAPUNOV FOR EXPANSIONS OF  
DYNAMIC SYSTEMS ON MANIFOLDS**

*Using the method of sign-variables of Liapunov functions, the questions of regularity of linear extensions of dynamical systems on manifolds have been studied.*

Національна академія наук України  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача

# Сучасні проблеми механіки та математики

Наукові праці у трьох томах

## Том 3

*Комп'ютерна верстка та технічне редагування:  
Кузь Антон, Тайстра Юрій*

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України

вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060  
тел.: +380 (32) 263-83-77, факс: +380 (32) 263-62-70

**E-mail:** [confmath2018@gmail.com](mailto:confmath2018@gmail.com)  
**Web:** <http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018>