Міністерство освіти і науки України

Західноукраїнський
національний університет

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ

Монографія

ТЕРНОПІЛЬ
2021

Монографія

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ
СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ

2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ

Монографія

За редакцією
доктора економічних наук,
професора Л. М. Буяк

Тернопіль
«Університетська думка»
2021

УДК 330.46:303.7:004.9
М-52

Рекомендовано до друку Вченою радою
Західноукраїнського національного університету
(протокол №1 від 31 серпня 2021 року)

Рецензенти:

Бабенко В.О. – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри міжнародної електронної комерції та готельно-ресторанної справи Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

Кривень В.А. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичних методів в інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

Лупенко С.А. – доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерних систем та мереж Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

М-52 **Методи та моделі управління складними системами**: колективна монографія / За редакцією д.е.н., проф. Л.М. Буяк // О.П. Адамів, О.С. Башуцька, Д.І. Боднар, Л.М. Буяк, О.Г. Возняк, І.В. Данилюк, Л.В. Дума, А.Я. Мушак, Р.М. Пасічник, К.М. Пришляк, Н.Г. Хома. — Тернопіль: ВПЦ «Університетська думка», 2021. – 471 с.

Монографія містить дослідження різних аспектів розвитку регіонального управління, які стосуються ресурсного забезпечення регіону, оцінки ефективності програм регіонального розвитку, зокрема розвитку його інтелектуального потенціалу, управління кваліфікованим трудовим населенням регіону, загальних проблем організації регіонального бізнесу та організації окремих виробничих процесів, автоматизації процесів підтримки наукових досліджень згаданої проблематики.

Призначена для студентів та аспірантів вищих навчальних закладів, а також дослідників проблем регіонального розвитку.

ISBN 978-966-654-658-9

ЗМІСТ

Боднар Дмитро Ількович, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики

ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ ЕФЕКТИВНОСТІ ПРОГРАМ РЕГІОНАЛЬНОГО РОЗВИТКУ

Недоліками методів оцінювання програм регіонального розвитку є велика кількість якісних показників, не підкріплених кількісними даними, зведення оцінювання програм до контролю за цільовим використанням коштів, декларативність цілей, зіставлення неадекватних показників та ін. Крім того методика оцінювання, вибір показників, які демонструють тенденції розвитку регіону часто змінювались при зміні складу керівництва регіону. Сама практика визначення таких показників мало поширена на регіональному рівні. Стара система програмно-цільового планування мала організаційні можливості ефективного об’єднання ресурсів і виконавців. Доцільно говорити про комплексний показник – валовий регіональний продукт.

Державна стратегія регіонального розвитку передбачає підвищення рівня конкурентоспроможності регіонів, територіальну соціально-економічну інтеграцію та просторовий розвиток, ефективне державне управління у сфері регіонального розвитку. Для досягнення цих цілей запропоновано біля 50 показників, які доцільно розбити по групах: загальноекономічний стан регіонів, стан та розвиток промисловості і сільського господарства, стан та розвиток інфраструктури і послуг. Потрібно враховувати і демографічну характеристику населення, характеристику його зайнятості, характеристику екологічного стану регіону. Є показники-стимулятори: обсяг прямих іноземних інвестицій, обсяг експорту, ВРП на душу населення; щільність автомобільних доріг, середньомісячна зарплата, кількість малих підприємств на 10 тисяч наявного населення тощо.

Послідовність показників, які характеризують зміну явища в часі, називають динамічним рядом. Динамічні ряди є моментні та інтервальні. Зокрема метод підгонки полягає в тому, щоб знайти криву, яка достатньо точно відображає початкову інформацію з наступним використанням її для прогнозування. Найчастіше використовують наступні види кривих: лінійна, параболічна, поліноміальна третього степеня, логарифмічна, гіперболічна, експоненціальна та інші.

Пропонуємо для апроксимації показників ефективності програм регіонального розвитку використовувати неперервні дроби та їх багатовимірні узагальнення – гіллясті ланцюгові дроби.

Раціональні наближення конструктивно будуються за допомогою неперервних дробів чи їх узагальнень – апроксимацій Паде. У багатьох випадках швидкість збіжності раціональних наближень значно перевищує швидкість збіжності поліноміальних наближень, області збіжності неперервних дробів є ширшими, ніж області збіжності відповідних степеневих рядів. Крім того неперервні дроби володіють властивістю до не нагромадження похибок у процесі їх обчислення. Тому вони стали ефективним математичним апаратом у застосуваннях.

Уже більше 2000 років математики займаються вивченням неперервних дробів. Зрозуміло, що такий великий інтервал часу може витримати тільки теорія, яка має фундаментальне значення. За допомогою неперервних дробів розв’язуються важливі задачі теорії функцій, диференціальних рівнянь і теорії чисел.

Перші розвинення деяких елементарних функцій у неперервні дроби були запропоновані ще Л. Ейлером і Ж. Лагранжем у XVIII ст. У 1813 році К. Гаусс отримав розвинення відношень гіпергеометричних функцій у неперервний дріб, досліджував відповідність між степеневими рядами та неперервними дробами. П. Л. Чебишев використовував неперервні дроби при розв’язанні задач теорії функцій - задачі інтерполяції, інтегрування алгебраїчних функцій, розвинення довільних функцій у ряди за ортогональними поліномами.

Теорія неперервних дробів була започаткована ще за часів Ейлера. Дослідження і використання можливостей неперервних дробів у великих масштабах стало можливим тільки тоді, коли завдяки фон Нейману зрозуміли, як можна проводити обчислення.

Неперервним дробом називають впорядковану пару $<<\{a_n\},\{b_n\}>,\{f_n\}>$, де a_1, a_2, … і b_0, b_1, b_2, … – комплексні числа, причому всі $a_n \neq 0$, а $\{f_n\}$ – послідовність в розширеній комплексній площині, що визначається наступним чином:

$$f_n = S_n(0), \quad n = 0,1,2,..., \tag{1а}$$

де

$$S_0(w) = s_0(w), \quad S_n(w) = S_{n-1}(s_n(w)), \quad n = 1,2,3,..., \tag{1б}$$

$$s_0(w) = b_0 + w, \quad s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \quad n = 1,2,3,... \tag{1в}$$

Алгоритмом, який задає неперервний дріб, є функція D, що ставить у відповідність кожній впорядкованій парі $<\{a_n\},\{b_n\}>$ послідовність $\{f_n\}$, визначену формулами (1).

Числа a_n і b_n називають *елементами* або відповідно n-ми *частинними чисельником* і *частинними знаменником* неперервного дробу; дріб $\frac{a_n}{b_n}$ називають n-ою *ланкою* неперервного дробу; f_n – n-им *підхідним дробом*.

Якщо $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ – нескінченні послідовності, то неперервний дріб $<<\{a_n\},\{b_n\}>,\{f_n\}>$ називається *нескінченним*.

Неперервний дріб називається *скінченним*, якщо $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ мають тільки скінченне число членів a_1, a_2, …, a_m і b_0, b_1, b_2, …, b_m.

Отже, n-ий підхідний дріб можна записати наступним чином:

$$f_n = b_0 + \cfrac{a_0}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}, \tag{2}$$

і тому неперервний дріб $<<\{a_n\},\{b_n\}>,\{f_n\}>$ можна записати у вигляді:

$$b_0+\cfrac{a_0}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots}}}\,. \tag{3}$$

Для зручності будемо використовувати компактні позначення неперервного дробу (3) в одній із наступних форм:

$$b_0+\frac{a_1}{|b_1}+\frac{a_2\,|}{|b_2}+\ldots+\frac{a_n\,|}{|b_n}+\ldots, \tag{4}$$

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}+\ldots \text{ або } b_0+\mathop{D}_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n} \tag{5}$$

Аналогічно для n-го підхідного дробу f_n можна використовувати такий запис:

$$f_n=b_0+\frac{b_1|}{|a_1}+\frac{b_2|}{|a_2}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n} \text{ або } f_n=b_0+\mathop{D}_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}.$$

Тоді неперервний дріб

$$b_0+\frac{(-a_1)\,|}{|(b_1)}+\frac{(-a_2)\,|}{|(b_2)}+\ldots+\frac{(-a_n)\,|}{|(b_n)}+\ldots$$

ми можемо записати у вигляді:

$$b_0-\frac{a_1|}{|b_1}-\frac{a_2|}{|b_2}-\ldots-\frac{a_n|}{|b_n}-\cdots.$$

Кожному неперервному дробу (5) ставляться у відповідність послідовності комплексних чисел $\{A_n\}$ і $\{B_n\}$, які визначаються системою лінійних рекурентних рівнянь другого порядку:

$$A_n=b_nA_{n-1}+a_nA_{n-2}, n=1,2,3,\ldots, \tag{6}$$

$$B_n=b_nB_{n-1}+a_nB_{n-2},\quad n=1,2,3,\ldots, \tag{7}$$

з початковими умовами

$$A_{-1}=1,\quad A_0=b_0,\quad B_{-1}=0,\quad B_0=1. \tag{8}$$

Числа A_n і B_n називаються відповідно n-м канонічним *чисельником* і канонічним *знаменником* n-го підхідного дробу.

Будемо використовувати таку класифікація функціональних неперервних дробів.

С-дроби – це функціональні неперервні дроби вигляду

$$1+\frac{a_1x^{\alpha_1}|}{|1}+\frac{a_2x^{\alpha_2}|}{|1}+\frac{a_3x^{\alpha_3}|}{|1}+\ldots,\ a_n\neq 0, \qquad (9)$$

де всі α_n – додатні цілі числа, а a_n – ненульові комплексні константи.

Якщо всі $\alpha_n=1$, то дріб (9) називається *правильним С-дробом*.

Якщо $\alpha_n=1$ і $a_n>0$ для $n\geq 1$, то дріб (9) називається *S-дробом*.

Неперервні дроби вигляду

$$\frac{s_0|}{|1}+\frac{g_1x|}{|1}+\frac{(1-g_1)g_2x|}{|1}+\frac{(1-g_2)g_3x|}{|1}+\frac{(1-g_3)g_4x|}{|1}+\ldots,$$

де

$$s_0>0,\quad 0<g_n<1,\quad n=1,2,3,\ldots,$$

називаються *g-дробами*. *g-дроби* зображають голоморфні функції у площині з розрізом $G=\{|\arg(1+z)|<\pi\}$. Встановлено інтегральне представлення цих функцій, досліджено збіжність дробу, встановлено оцінку швидкості збіжності в області G.

Нехай

$$f(x)=1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots \qquad (10)$$

розвинення функції у степеневий ряд в околі нуля,

$$D(x) = 1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{a_ix}{1}, \qquad (11)$$

правильний неперервний C-дріб, у якого всі $a_n\neq 0$,

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1 + \underset{k=1}{\overset{n}{D}}\frac{a_ix}{1}, \qquad (12)$$

– n-ий підхідний дріб неперервного дробу (11).

Кожен правильний C-дріб (11) відповідний однозначно визначеному функціональному степеневому ряду (11). Порядок відповідності n-го підхідного дробу $f_n(x)$ рівний $v_n = n+1$, так що розвинення Тейлора функції $f_n(x)$ співпадає з (11) аж до члена $c_n x^n$ включно, тобто

$$f_n(x) = 1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \gamma_{n+1}^{(n)} x^{n+1} + \ldots.$$

Якщо два правильні C-дроби, а саме дроби (11) та

$$1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{\tilde{a}_i x}{1}, \quad \tilde{a}_n \neq 0,$$

відповідають одному й тому ж ряду (10), то

$$a_n = \tilde{a}_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Перш за все цікавим є питання, коли ланцюговий дріб, який відповідає даному степеневому ряду, є правильним.

Неперервний дріб, який відповідає степеневому ряду

$$1 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \cdots$$

тоді і лише тоді нескінченний і правильний, коли визначники

$$\varphi_v = \begin{vmatrix} c'_1 & c'_2 & \ldots & c'_v \\ c'_2 & c'_3 & \ldots & c'_{v+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c'_v & c'_{v+1} & \ldots & c'_{2v-1} \end{vmatrix} \ (v = 1, 2, \ldots),$$

$$\psi_v = \begin{vmatrix} c'_2 & c'_3 & \ldots & c'_v \\ c'_3 & c'_4 & \ldots & c'_{v+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c'_v & c'_{v+1} & \ldots & c'_{2v-1} \end{vmatrix} \ (v = 2, 3, \ldots)$$

всі відмінні від нуля. В цьому випадку коефіцієнти відповідного ланцюгового дробу мають значення:

$$c_1 = \varphi_1, c_{2v} = \frac{\psi_{v+1}\varphi_{v-1}}{\psi_v \varphi_v}, c_{2v+1} = \frac{\psi_v \varphi_{v+1}}{\psi_{v+1}\varphi_v}, (v = 1, 2, \ldots)$$

при цьому потрібно покласти $\varphi_0 = 1, \psi_1 = 1$.

Приєднані неперервні дроби – це дроби такого вигляду

$$\frac{k_1 x|}{|1+l_1 x} - \frac{k_2 x^2|}{|1+l_2 x} - \frac{k_3 x^2|}{|1+l_3 x} - \frac{k_4 x^2|}{|1+l_4 x} - \ldots, \quad k_n \neq 0, \qquad (13)$$

де k_n і l_n – комплексні константи. Парна частина правильного *C*-дробу

$$\frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \ldots, \quad a_n \neq 0,$$

є приєднаним неперервним дробом

$$\frac{a_1 x|}{|1+a_2 x} - \frac{a_2 a_3 x^2|}{|1+(a_3+a_4)x} - \frac{a_4 a_5 x^2|}{|1+(a_5+a_6)x} - \ldots.$$

Кожному неперервному дробу (13) однозначно відповідає степеневий ряд

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

таким чином, що для кожного λ, ряд Тейлора для підхідного дробу λ-го порядку співпадає з ним до члена $c_{2\lambda} x^{2\lambda}$ *включно.*

Степеневий ряд

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

має лише тоді і тільки тоді приєднаний ланцюговий дріб (13), коли визначники

$$\varphi_v = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_v \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{v+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_v & c_{v+1} & \ldots & c_{2v-1} \end{vmatrix} \ (v \neq 1)$$

всі відмінні від нуля, і саме тоді, якщо покласти

$$\varphi_0 = 1, x_1 = c_2,\ x_v = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{v-1} & c_{v+1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_v & c_{2v+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_v & c_{v+1} & \ldots & c_{2v-2} & c_{2v} \end{vmatrix} (v \geq 2),$$

то $k_1 = \varphi_1, l_1 = -\frac{x_1}{\varphi_1},\ k_v = \frac{\varphi_v \varphi_{v-2}}{\varphi_{v-1}^2}, l_v = \frac{x_{v-1}}{\varphi_{v-1}} - \frac{x_v}{\varphi_v}, v \geq 2.$

З приєднаними дробами тісно зв’язані наступні дроби.

J-дроби – це дроби виду

$$\frac{1|}{|d_1+x} - \frac{c_1^2|}{|d_2+x} - \frac{c_2^2|}{|d_3+x} - \frac{c_3^2|}{|d_4+x} - \ldots, \quad c_n^2 \neq 0,$$

де c_n і d_n – комплексні константи.

J-дріб буде додатно визначеним, якщо існує послідовність додатних чисел $\{g_n\}$, така, що

$$\left|c_n^2\right| - \mathrm{Re}(c_n^2) \le 2\delta_n \delta_{n+1}(1-g_{n-1})\,g_n, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

де

$$\delta_n = \mathrm{Im}(d_n) \ge 0 \text{ і } 0 < g_{n-1} < 1, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

Якщо всі c_n і d_n – дійсні числа, то дріб називається дійсним *J*-дробом. Причому, дійсні *J*-дроби будуть додатно визначеними.

Загальні Т-дроби – це неперервні дроби виду

$$\frac{x\,|}{|\,e_1+d_1x} + \frac{x\,|}{|\,e_2+d_2x} + \frac{x\,|}{|\,e_3+d_3x} + \ldots, \quad e_n \ne 0,$$

де e_n і d_n – комплексні константи.

Якщо $e_n = 1$ для всіх n, то цей дріб називається *Т-дробом*. Загальний *Т*-дріб можна представити у вигляді еквівалентного неперервного дробу

$$\frac{F_1x\,|}{|\,1+G_1x} + \frac{F_2x\,|}{|\,1+G_2x} + \frac{F_3x\,|}{|\,1+G_3x} + \ldots, \quad F_n \ne 0,$$

де

$$F_n = \frac{1}{e_n e_{n-1}}, \quad G_n = \frac{d_n}{e_n} \quad (e_0 = 1), \quad n=1,2,3,\ldots.$$

Загальний *Т*-дріб називається *додатним Т-дробом*, якщо для $n \ge 1$ всі коефіцієнти e_n, d_n, F_n, G_n – додатні дійсні числа. Із загальними *Т*-дробами тісно пов'язані *М*-дроби

$$\frac{F_1|}{|1+G_1(x)} + \frac{F_2|}{|1+G_2(x)} + \frac{F_3|}{|\,1+G_3(x)} + \ldots, \quad F_n \ne 0,$$

де $G_n(x)$ – многочлени.

Для інтерполяції та апроксимації функцій неперервними дробами розглядаються обернені поділені різниці та обернені похідні, встановлюються їх основні властивості. Визначимо інтерполяційний дріб Тіле.

Нехай значення функції $f(x)$ задаються в точках $x_0, x_{1,} ..., x_n$, $y_i = f(x_i)$, причому $y_i \neq y_j$, якщо $i \neq j$. Побудуємо таку послідовність функцій:

$$\Phi_0(x) = f(x), \quad \Phi_1[x_0, x] = \frac{x - x_0}{\Phi_0(x) - \Phi_0(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, ...,$$

$$\Phi_k[x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x] = \frac{x - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, ..., x_{k-2,}\, x] - \Phi_{k-1}[x_0, ..., x_{k-2}, x_{k-1}]},$$

де $k = 1, 2, ...$. Вираз $\Phi_n[x_0, ..., x_n]$ називають *оберненою n-ою поділеною різницею* функції $f(x)$ для значень аргументу $x_0, x_1, ..., x_n$.

Послідовно підставляючи ці вирази, отримаємо зображення функції $f(x)$ у вигляді дробу:

$$f(x) = \Phi_0(x_0) +$$

$$+ \cfrac{x - x_0}{\Phi_1[x_0, x_1] + \cfrac{x - x_1}{\Phi_2[x_0, x_1, x_2] + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{x - x_{n-1}}{\Phi_n[x_0, ..., x_{n-1}, x_n] + \cfrac{x - x_n}{\Phi_{n+1}[x_0, ..., x_n, x]}}}}}.$$

Відкинувши останню ланку, отримаємо *інтерполяційний дріб Тіле*:

$$\Phi_0(x_0) + \cfrac{x - x_0}{\Phi_1[x_0, x_1] + \cfrac{x - x_1}{\Phi_2[x_0, x_1, x_2] + \cfrac{}{\ddots \quad + \cfrac{x - x_{n-1}}{\Phi_n[x_0, ..., x_{n-1}, x_n]}}}}.$$

Вирази вигляду

$$\rho_k(x_0, ..., x_{k-1}, x_k) =$$

$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{\rho_{k-1}(x_0, ..., x_{k-2}, x_k) - \rho_{k-1}(x_0, ..., x_{k-2}, x_{k-1})} + \rho_{k-2}(x_0, ..., x_{k-2}),$$

$\rho_{-1}=0$, $k=1,2,\ldots$ називають *оберненою різницею* функції $f(x)$ для значень аргументу $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Справджуються такі співвідношення

$$\rho_k[x_0,\ldots,x_k]=\Phi_k[x_0,\ldots,x_k]+\Phi_{k-2}[x_0,\ldots,x_{k-2}]+\ldots+ \\ +\Phi_{k-2[k/2]}[x_0, x_{k-2[k/2]}],$$

які називатимемо *оберненими різницями 2-го типу*. Обернені різниці симетричні відносно усіх своїх аргументів.

Якщо існує границя оберненої різниці n-го порядку $\rho_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, при $x_0, x_1, \ldots, x_n \to x$, то граничне значення називається *оберненою похідною Тіле n-го порядку* функції $f(x)$ в точці x.

Для обернених похідних виконується рекурентне співвідношення

$${}^{(n)}f(x)={}^{(n-2)}f(x)+n\,`[{}^{(n-1)}f(x)],$$

де $n=2,3,\ldots$, причому ${}^{(0)}f(x)=f(x)$, ${}^{(1)}f(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

Наприклад, розвинення показникової та степеневої функцій в неперервний дріб Тіле в околі точки x_0 матиме вигляд

$$e^x=e^{x_0}\left(1+\frac{x-x_0\,|}{|1}-\frac{x-x_0\,|}{|2}+\frac{x-x_0\,|}{|3}-\frac{x-x_0\,|}{|2}+\frac{x-x_0\,|}{|5}- \right. \\ \left. -\frac{x-x_0\,|}{|2}+\frac{x-x_0\,|}{|7}-\ldots-\frac{x-x_0\,|}{|2}+\frac{x-x_0}{|2k+1}-\ldots\right),$$

$$(c+x)^{\alpha}= \\ =(c+x_0)\left(1+\frac{\alpha(x-x_0)\,|}{|c+x_0}+\frac{(1-\alpha)(x-x_0)\,|}{|2}+\frac{(1+\alpha)(x-x_0)\,|}{|3(c+x_0)}+ \right. \\ +\frac{(2-\alpha)(x-x_0)\,|}{|2}+\frac{(2+\alpha)(x-x_0)\,|}{|5(c+x_0)}+\frac{(3-\alpha)(x-x_0)\,|}{|2}+ \\ \left. +\frac{(3+\alpha)(x-x_0)\,|}{|7(c+x_0)}+\ldots+\frac{(k-\alpha)(x-x_0)\,|}{|2}+\frac{(k+\alpha)(x-x_0)\,|}{|(2k+1)(c+x_0)}+\ldots\right).$$

Різні конструкції багатовимірних узагальнень неперервних дробів виникли в теорії чисел. Ще Лагранж довів, що кожна квадратична ірраціональність розвивається у правильний неперервний періодичний дріб. Проблема побудови правильних багатовимірних неперервних дробів, у які розвивались би довільні алгебраїчні ірраціональності вищих порядків залишається сьогодні відкритою. У цьому плані одним з найбільш вдалих і досліджених узагальнень неперервних дробів є алгоритм Якобі-Перрона. Якобі побудував алгоритм, який дав можливість як завгодно точно наблизити два несумірні дійсні числа раціональними зі спільним знаменником. Це перша спроба знайти трьохвимірні аналоги правильних неперервних дробів. Збіжність алгоритму обґрунтував Перрон через 37 років.

Для побудови розвинення дійсного числа у правильний неперервний дріб використовується алгоритм Евкліда. Підхідні дроби цього розвинення дають найкращі раціональні наближення даного числа. Можна отримати багатовимірні узагальнення неперервних дробів, узагальнюючи алгоритм Евкліда. Цей підхід застосував норвежський математик Viggo Brun ще в 1919 р. Він використав інтерпретацію алгоритму Евкліда як алгоритму "різниць". Майже через 40 років він повернувся до цієї тематики. Розглядаючи алгоритм Евкліда як алгоритм "часток", Є. В. Подсипанін побудував алгоритм, по суті еквівалентний алгоритму Brun'a.

Японський математик Katahiro Takebe (1664 – 1739) застосував поняття, що узагальнює неперервний дріб до розв'язання діофантових нерівностей. Це було першим узагальненням неперервних дробів.

В. Я. Скоробогатько запропонував багатовимірне узагальнення неперервного дробу для функцій багатьох змінних, назвавши його гіллястим ланцюговим дробом. Поняття гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД) було одним із його наукових відкрить, яке він активно пропагував все своє життя, починаючи з 1966 року, коли було вперше опубліковано дві праці з даної тематики у матеріалах Другої конференції молодих математиків України. Він створив наукову школу з аналітичної теорії ГЛД та їх застосувань, вагомий вклад у формування якої внесли також його учні: П. І. Боднарчук, Р. В. Слоньовський, І. П. Пустомельников, Д. І. Боднар, Х. Й. Кучмінська, М. С. Сявавко, М. О. Недашковський, В. Сємашко, В. І. Шмойлов, З. І. Крупка, Я. М. Пелех, Є. М. Максимів, М. М. Пагіря, І. В. Єрохов та їх учні: Р. І. Дмитришин, Т. М. Антонова, О. М. Сусь, Н. П. Гоєнко, О .С. Манзій, В. Р. Гладун, О. Є. Баран, І. Б. Біланик, Є. О. Болтарович, М. М. Бубняк, Р. І. Михальчук, С. М. Возна, О. Я. Ковальчук, Р. А. Кацала.

Особливі та частинні випадки таких дробів розглядалися раніше. В роботі Ilse Pratje вони виникли при застосуванні композицій відображень Жуковського

$$w_n = \frac{a_n}{2}\left(\frac{w_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{w_{n+1}}\right), \quad n = 1,2,\ldots,$$

до задачі уніформизації, у В. П. Терських – при дослідженні механічних коливань у різних енергетичних установках в суднобудуванні.

Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) визначаються за допомогою композицій багатовимірних дробово-лінійних відображень. ГЛД – це послідовність $\{f_n\}$, де

$$f_n = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2} + \ddots + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{a_{i_1 i_2 \cdots i_n}}{b_{i_1 i_2 \cdots i_n}}}} = b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i_1 i_2 \cdots i_k}}{b_{i_1 i_2 \cdots i_k}}.$$

Характерні рекурентні формули для канонічних чисельників та канонічних знаменників підхідних дробів багатовимірних узагальнень неперервних дробів, що розглядались раніше, для ГЛД не справедливі. Різні аспекти в дослідженні аналітичної теорії ГЛД розглядались у монографіях П. І. Боднарчука і В. Я. Скоробогатька, В. Я. Скоробогатька, Д. І. Боднара, М. С. Сявавка, Х. Й. Кучмінської та оглядових статтях Д. І. Боднара і Х. Й. Кучмінської.

М. С. Сявавко запропонував континуальний аналог ГЛД і застосував його до розв’язання інтегральних рівнянь. М .О. Недашковським та його учнями побудовані економічні чисельно стійкі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь на основі гіллястих ланцюгових дробів.

Серед різноманітних багатовимірних узагальнень неперервних дробів найбільш пристосованими до наближення функцій багатьох змінних є гіллясті ланцюгові дроби. Існують різні конструкції таких дробів: ГЛД з N гілками розгалуження, двовимірні відповідні неперервні дроби, ГЛД з нерівнозначними змінними. Найпростішими за структурою, аналогічні структурі кратних степеневих рядів, є гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними.

ГЛД з нерівнозначними змінними досліджувались в роботах Д. І. Боднара, О. Є. Баран, Т. М. Антонової, В. Сємашка, Р. І. Дмитришина, М. М. Бубняк, І. Б. Біланик.

Подвійний степеневий ряд можна записати у вигляді

$$\sum_{i,\,j=0}^{\infty} c_{ij} z_1^i z_2^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} z_1^i \right) z_2^j .$$

Переносячи цю ідею по формі запису на багатовимірний дріб, отримаємо

$$f(z_1, z_2) = f_0(z_1) + \cfrac{a_{01} z_2}{f_1(z_1) + \cfrac{a_{02} z_2}{f_2(z_1) + \ddots}} = b_0 + \cfrac{a_{10} z_1}{1 + \cfrac{a_{20} z_1}{1 + \ddots}} + \cfrac{a_{01} z_2}{1 + \cfrac{a_{11} z_1}{1 + \cfrac{a_{21} z_1}{1 + \ddots}} + \cfrac{a_{02} z_2}{1 + \ddots}} .$$

Загальний ГЛД з $N = 2$ гілками розгалуження має таку структуру:

$$b_0 + \cfrac{a_1 z_1}{1 + \cfrac{a_{11} z_1}{1 + \ddots} + \cfrac{a_{12} z_2}{1 + \ddots}} + \cfrac{a_2 z_2}{1 + \cfrac{a_{21} z_1}{1 + \ddots} + \cfrac{a_{22} z_2}{1 + \ddots}} .$$

Для запису ГЛД загального вигляду будемо вживати позначення

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} . \qquad (14)$$

Для запису ГЛД з нерівнозначними змінними – позначення

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}},$$

де $i_0 = N$, $i(k) = i_1 i_2 \cdots i_k$, – мультиіндекс, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ – комплексні числа або функції.

Створена В. Я. Скоробогатьком наукова школа з аналітичної теорії ГЛД та їх застосувань продовжує розвивати як аналітичну теорію ГЛД так і інших багатовимірних узагальнень неперервних дробів. Досліджуються числові і функціональні ГЛД загального вигляду з N ($N > 1$) гілками розгалуження, спеціального вигляду з нерівнозначними змінними, двовимірні неперервні дроби (ДНД). Зазначимо деякі найважливіші, з нашої точки зору, отримані результати і напрямки досліджень.

1. Дослідження дробів з дійсними елементами. Для ГЛД загального вигляду в роботах Т. М. Антонової, В. Р. Гладуна, для ДНД в роботах Т. М. Антонової, Х. Й. Кучмінської, О. М. Сусь досліджувались властивості послідовностей підхідних дробів, елементами яких є дійсні числа, зокрема, властивості монотонності, обмеженості. Це дало змогу довести ряд достатніх ознак збіжності ГЛД з дійсними елементами, дослідити багатовимірні множини збіжності різних підпослідовностей їх підхідних дробів. Деякі, отримані тут результати, не мають аналогів у теорії неперервних дробів.

2. Побудова та дослідження багатовимірних g-дробів. Найбільш вивченим класом функціональних неперервних дробів є g-дроби, якими зображається клас голоморфних функцій на площині з розрізом вздовж дійсної осі від мінус одиниці до мінус нескінченності. Різні конструкції багатовимірних g-дробів запропоновані Д. І. Боднаром та Р. І. Дмитришиним (на основі загальних ГЛД та ГЛД з нерівнозначними змінними), Х. Й. Кучмінською, С. М. Возною (на основі ДНД). Техніка g-дробів і ланцюгових послідовностей використана при доведенні багатьох ознак збіжності ГЛД та ДНД, зокрема, аналогів теорем Перрона, Ван Флека, Пейдона — Уолла, Слешинського — Прінгсгейма, Коха та ін. Для таких дробів Р. І. Дмитришин побудував параболічні та еліптичні області збіжності, отримав оцінки похибок наближень підхідними дробами. Аналогічні результати встановлено і для двовимірних g-дробів, побудованих на основі ДНД. У роботі Д. І. Боднара і Р. І. Дмитришина досліджений аналог алгоритму Бауера розвинення подвійного степеневого ряду у двовимірний g-дріб із нерівнозначними змінними.

3. Наближення гіпергеометричних функцій багатьох змінних. Встановлено нові рекурентні співвідношення для гіпергеометричних функцій Аппеля (Д. І. Боднар, О. С. Манзій), Лаурічелли (Н. П. Гоєнко), Лаурічелли—Сарана, Горна вироджених гіпергеометричних функцій (Р. І. Дмитришин, Т. М. Антонова), на основі яких побудовано розвинення відношення цих функцій у ГЛД, досліджено збіжність отриманих розвинень. Н. П. Гоєнко отримала багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ньорлунда, оцінки похибок наближень підхідними дробами та, використовуючи принцип відповідності для послідовності аналітичних функцій до формального кратного степеневого ряду, встановила критерій рівномірної збіжності до функції її формального розвинення у ГЛД.

4. Дослідження збіжності різних типів багатовимірних неперервних дробів із комплексними елементами. Є. О. Болтарович довів, що теорема Лейтона—Уолла (теорема про спарені області збіжності) в принципі не переноситься на ГЛД. Різні аналоги цієї теореми були встановлені Є. О. Болтавичем (для ГЛД загального вигляду), Т. М. Антоновою і О. М. Сусь (для ДНД), О. Є. Баран (для ГЛД з нерівнозначними змінними). Д. І. Боднар, Р.І.Дмитришин, Х. Й. Кучмінська, Т. М. Антонова, О. М. Сусь, В. Р. Гладун, І.Б.Біланик встановили нові ознаки збіжності типу множин збіжності (параболічні, кутові, кругові та інші), М. О. Недашковський отримав узагальнення теореми Слєшинського – Прінгсгейма для ГЛД загального вигляду, елементами якого є комплексні матриці. У вигляді таких дробів він представив розв’язки алгебраїчних рівнянь із матричними коефіцієнтами. Р. І. Дмитришин дослідив відповідність між кратними степеневими рядами і гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними, означив та дослідив різні класи функціональних ГЛД з нерівнозначними змінними.

5. Побудова інтерполяційних формул у вигляді ДНД. Для функцій двох змінних узагальнено як відомі інтерполяційні формули Тіле (Х. Й. Кучмінська, В. Сємашко, М. М. Пагіря), так і побудовано нові формули (симетричну і несиметричну) на основі комбінації обернених різниць Тіле та розділених різниць Ньютона, так званих змішаних різниць – формули типу Ньютона—Тіле (Х. Й. Кучмінська, С. М. Возна).

6. Дослідження стійкості до збурень ГЛД. В. Р. Гладун дав означення стійкості до збурень для нескінченних ГЛД загального вигляду, встановив різні формули для обчислення абсолютних та відносних похибок підхідних дробів, отримав умови стійкості до збурень ГЛД з додатними, від'ємними та знакозмінними дійсними елементами, побудував та дослідив багатовимірні множини стійкості ГЛД із комплексними компонентами.

7. Інтегральні ланцюгові дроби (ІЛД). М. С. Сявавко означив континуальний аналог гіллястого ланцюгового дробу – ІЛД, побудував разом зі своїми учнями основи аналітичної теорії ІЛД, застосував ці дроби для розв'язання інтегральних рівнянь. Ознаки збіжності ІЛД встановлені М. С. Сявавком, Р. І. Михальчуком, Т. М. Антоновою; їх застосування розглядались Т. В. Пасічником, О. М. Рибицькою. Б. Р. Михальчук застосував ІЛД для інтерполяції функціоналів.

Результати досліджень регулярно доповідаються на всеукраїнських, міжнародних школах, семінарах, конференціях. Організовано та проведено три конференції „Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування“ (1975, Львів; 1994, Верхнє-Синєвидне; 2002, Ужгород).

При вивченні властивостей послідовності $\{f_k\}$ наближень ГЛД (14) використовується формула різниці $f_m - f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $m > n$, Х. Й. Кучмінської. Дещо іншу структуру двовимірних неперервних дробів запропонував В. Семашко.

Відповідні ГЛД для ряду (15) можна будувати у вигляді ГЛД з нерівнозначними змінними

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1},$$

де $i_0 = N$. Такі дроби в даний час найбільш активно досліджуються. Для них розглянуто різні ознаки збіжності та встановлено зв'язок із кратними степеневими рядами.

Р. І. Дмитришин означив та дослідив різні класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, встановив умови їх збіжності, дав оцінки похибок апроксимації підхідними дробами, побудував різні багатовимірні алгоритми розвинення кратних степеневих рядів в такі дроби, зокрема: g-алгоритм Бауєра, q-d-алгоритм Рутисхаузера та інші. Він побудував та дослідити розвинення деяких конкретних аналітичних функцій функціональними ГЛД з нерівнозначними змінними.

Наприклад, функція

$$F(a,1,c;z_1)\,F\left(b,1,d;-z_2\cdot\left(F(a,1,c;-z_1)\right)^2\right)=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(a)_k}{(c)_k}z_1^k\right)^{2l+1}\times\frac{(b)_l}{(d)_l}z_2^l$$

розкладається у g-дріб з нерівнозначними змінними

$$\left(\Phi_0(z_1)+\mathop{D}_{n=1}^{\infty}\frac{g_{0n}(1-g_{0n})z_2}{\Phi_n(z_1)}\right)^{-1},\ \Phi_n(z_1)=1+g_{1n}z_1\left(1+\mathop{D}_{k=2}^{\infty}\frac{g_{kn}(1-g_{k-1,n})z_1}{1}\right)^{-1},$$

$$g_{2r-1,l-1}=\frac{a+r-1}{c+2r-2},\,g_{2r,l-1}=\frac{r}{c+2r-1},\,g_{0,2l-1}=\frac{b+l-1}{d+2l-2},\,g_{0,2l}=\frac{l}{d+2l-1}.$$

У різних класах ГЛД розглядаються різні типи функціональних ГЛД: багатовимірні g-, J-, π-, S-, C-дроби. Найбільш вивченими є багатовимірні g-дроби.

Дослідимо збіжність ГЛД з додатними і комплексними компонентами. Сформулюємо багатовимірні аналоги деяких класичних ознак збіжності неперервних дробів.

Теорема 1 ***(Зейдель 1848).*** *Неперервний дріб* $b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{1}{b_k}$, *де* $b_k > 0$, *збігається тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Нехай $\alpha_k = \min(b_{i(k)} : 1 \le i_p \le N, p = \overline{1,k})$, $\beta_k = \max(b_{i(k)} : 1 \le i_p \le N, p = \overline{1,k})$ – мінімальний і максимальний елементи ГЛД на k-му поверсі.

Теорема 2. *ГЛД*

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{16}$$

з додатними елементами розбігається, якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ *збігається.*

Теорема 3. *ГЛД (16) з додатними елементами збігається, якщо*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1}(\alpha_k + N^{-1}\alpha_{k-2} + N^{-2}\alpha_{k-4} + \cdots + N^{-[(k-1)/2]}\alpha_{k-2[(k-1)/2]} = \infty .$$

Питання чи умова розбіжності ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ є достатньою для збіжності дробу (16) сьогодні є відкритим. Встановлено необхідні і достатні умови збіжності (16) при деяких додаткових обмеженнях. Наприклад, $\beta_k \le M\alpha_k$, $k = 1,2,\ldots$.

Для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними з додатними елементами

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{i_{k}-1} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{17}$$

І. Б. Біланик встановила критерій збіжності та ефективну достатню умову збіжності.

Теорема 4. *ГЛД (17) з додатними елементами є збіжним, якщо розбіжними є ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{m[p]},\ m=\overline{1,N};\ \sum_{p=1}^{\infty} b_{i[n]m[p]},\ m=\overline{1,N-1},\ i(n)\in I^{(m+1)},$$

де

$$I^{(m)}=\{i(n)=i_1 i_2 .. i_n : m\le i_n\le i_{n-1}\le\ldots\le i_0;\, n\ge 1;\, i_0=N\},$$

$$m=\overline{2,N},\ m[p]=\underbrace{mm...m}_{p}.$$

Розглянемо багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ворпіцького.

Теорема 5 (*Ворпіцький, 1865*). *Якщо для неперервного дробу*

$$\left(1+\mathop{D}_{k=2}^{\infty}\frac{c_k(z)}{1}\right)^{-1} \tag{18}$$

де $c_k(z)$ *– комплексні функції, визначені в деякій області* G*, виконуються умови*

$$|c_k(z)|\le\frac{1}{4},\ k=1,2,\ldots,$$

то:

а) дріб (18) рівномірно збігається в G*;*

б) областю значень є круг

$$\left|z-\tfrac{4}{3}\right|\le\tfrac{2}{3};$$

в) стала $\tfrac{1}{4}$ *і область значень є найкращими, тобто сталу не можна збільшити, область значень зменшити.*

Теорема 6. *Якщо для ГЛД*

$$\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{19}$$

де $a_{i(k)}$ *– комплексні числа, при всеможливих наборах індексів виконуються умови*

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left| a_{i(k)} \right| \le \alpha \le \frac{1}{4}, \tag{20}$$

то:

1) ГЛД (20) збігається;

2) справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f - f_m| \le \frac{\left(1-q^2\right)q^m}{1-q^{m+1}}, m \ge 1, \textit{ якщо } 0 \le \alpha < 1/4;$$

$$|f - f_m| \le \frac{2}{m+2}, m \ge 1, \textit{ якщо } \alpha = 1/4,$$

де f *– значення ГЛД (20),* f_m *– його* m*-ий підхідний дріб*

$$q = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{1+\sqrt{1-4\alpha}};$$

3) значення дробу (20) і всіх його підхідних дробів лежать в області

$$\left| \left(\alpha + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\alpha}\right) \right) z - 1 \right| \le \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\alpha}\right); \tag{21}$$

4) гранична стала $\alpha = 1/4$ *є найкращою, її не можна збільшити, а відповідну область значень (20) не можна зменшити.*

Багато з існуючих ознак збіжності неперервних дробів є ознаками типу областей збіжності (теореми Ворпіцького, Ван Флека, параболічні теореми).

Дві області G_1 і G_2 комплексної площини називаються парними областями збіжності неперервного дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1}, \tag{22}$$

якщо при виконанні умов $a_{2k-1} \in G_1$ і $a_{2k} \in G_2$, $k = 1,2,\ldots$, дріб (22) збігається.

Перший результат про парні області збіжності був отриманий у 1936 році Лейтоном і Уоллом: для збіжності дробу (22) достатньо виконання умов

$$|a_{2k-1}| \le \frac{1}{4} \text{ і } |a_{2k}| \le \frac{25}{4}, \ k = 1,2,\ldots.$$

Покладаючи $a_k = c_k^2$, $k = 1,2,\ldots$, Троном була встановлена теорема збіжності неперервного дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{1} \qquad (23)$$

до скінченого значення, якщо

$$|c_{2k-1}| \le \rho \text{ і } |c_{2k} \pm i| \ge \rho, \ 0 < \rho < 1, \ k = 1,2,\ldots,$$

причому ця збіжність є рівномірною відносно даних областей. Ланге довів збіжність дробу (23) до скінченого значення за умов, що

$$|c_{2k-1} \pm ia| \le \rho \text{ і } |c_{2k} \pm i(1+a)| \ge \rho, \ k = 1,2,\ldots,$$

де $a \in \mathbb{C}$ та a і ρ задовольняють нерівність $|a| < \rho < |a+1|$, причому ця збіжність є рівномірною відносно областей збіжності.

Для $\rho = 1$ Трон довів, що умови $|c_{2k-1}| \le 1$ і $|c_{2k} \pm i| \ge 1$, $k = 1,2,\ldots$, разом з умовою $|c_{2k}| > \varepsilon$, де ε – довільне додатне число, достатні для збіжності дробу (23) до скінченого значення, збіжність є рівномірною відносно даних областей.

Для $\rho > 1$ Трон встановив, що для збіжності дробу (22) до скінченного значення достатньо виконання умов

$$|a_{2k-1}| \le \rho^2 \text{ і } |a_{2k}| \ge 2(\rho^2 = \cos\arg a_{2k}), \ k = 1,2,\ldots.$$

Важливим є результат Н. Вишінскі та Дж. Мак Лафлін, який встановлює, що дріб (22) збігається до скінченого значення, якщо

$$|a_{2k-1}| \le c \text{ і } |a_{2k}| \ge 1 + 3c + 2\sqrt{c}\sqrt{2c+1}, \ k = 1,2,\ldots, \text{ де } c > 0.$$

Досліджувалися парні області збіжності для ГЛД з $N > 1$ гілками розгалуження на кожному поверсі. Є. А. Болтаровичем був побудований контрприклад, з якого випливає, що теорема Лейтона-Уолла у природному формулюванні, як теорема про парні області збіжності, на ГЛД не переноситься. Ним був встановлений аналог цієї теореми для дробу вигляду

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1} \quad , \tag{24}$$

де $i(k) = i_1 i_2 ... i_k$ – мультиіндекс, $a_{i(k)}$ – комплексні числа.

Теорема 7. *Нехай частинні чисельники ГЛД (24) з* $N > 1$ *гілками розгалуження є комплексними числами, які задовольняють умови:*

1) $|a_{i(2k-1)}| \le \dfrac{\alpha}{N}$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, 2k-1}$, $k = 1, 2, ...;$

2) для кожного натурального k *існує єдиний індекс* j_{2k}, $1 \le j_{2k} \le N$, *що*

$$|a_{i(2k-1) j_{2k}}| \ge R,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, 2k-1},\ k = 1, 2, ...,$$

$$|a_{i(2k)}| \le \frac{r}{N-1},\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, 2k},\ i_{2k} \ne j_{2k},\ k = 1, 2, ...,$$

де α, r, R *– довільні дійсні числа, такі, що*

$$0 \le \alpha \le \frac{1}{4},\ 0 \le r < \infty,\ R > \frac{(1+\alpha)(r + 2 - 2\alpha)}{1-\alpha},$$

$$(1-\alpha)^2 \left(\frac{R}{1+\alpha} - \frac{r}{1-\alpha} - 1 \right)^2 > \alpha (R + r).$$

Тоді ГЛД (24) збігається.

Області збіжності в теоремі 7 не є парними. Парні області збіжності ГЛД досліджували у своїх роботах Т. М. Антонова та В. Р. Гладун, для гіллясттого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними – О. Є. Баран.

О. Є. Баран для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду встановлено кругові області збіжності, які є багатовимірними узагальненнями деяких відомих теорем (У. Лейтона і Г. Уолла, В. Трона, Л. Ланге, Н. Вишінскі та Дж. Мак Лафліна) про спарені множини збіжності неперервних дробів. У випадку $N = 1$ при певних умовах на параметри отримані нею кругові множини збіжності є ширшими, ніж у згаданих вище теоремах.

Позначимо через I множину всіх мультиіндексів $i(k)$, тобто

$$I = \{i(k):\ i(k) = i_1 i_2 .. i_k,\ 1 \le i_p \le i_{p-1},\ p = \overline{1,k},\ k = 1,2,\ldots, i_0 = N\}.$$

Розіб'ємо множину I на три підмножини $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, які попарно не перетинаються:

$$I_1 = \{i(k):\ i(k) \in I,\ l = 1,\ k = 1,2,\ldots\},$$

$$I_2 = \{i(k):\ i(k) \in I,\ l - \text{парне},\ l > 1,\ k = 2,3,\ldots\},$$

$$I_3 = \{i(k):\ i(k) \in I,\ l - \text{непарне},\ l > 1,\ k = 3,4,\ldots\},$$

де $l = \sum_{s=1}^{k} \delta_{i_k}^{i_s}$ – кількість повторів індекса i_k в мультиіндексі $i(k) \in I$, $\delta_{i_k}^{i_s}$ – символ Кронекера.

Ці множини попарно не перетинаються.

Теорема 8. *Гіллястий ланцюговий дріб* ($N > 1$)

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}^2}{1}$$

з комплексними елементами $c_{i(k)}$, *збігається, якщо виконуються умови:*

а) $\left|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{1,i_k}\right| \le \xi_{1,i_k}$, $\left(\xi_{1,i_k} + \left|\Gamma_{1,i_k}\right|\right)^2 \le \dfrac{\rho_1 - \varepsilon_1}{i_{k-1} - 1}$, $i(k) \in I_1$;

б) $\left|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{2,i_k}\right| \le \xi_{2,i_k}$, $\left(\xi_{2,i_k} + \left|\Gamma_{2,i_k}\right|\right)^2 \ge (2 + \rho_1)(1 + \rho_1 + \rho + \varepsilon_2)$, $i(k) \in I_2$;

в) $\left|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{3,i_k}\right| \le \xi_{3,i_k}$, $\left(\xi_{3,i_k} + \left|\Gamma_{3,i_k}\right|\right)^2 \le (\rho - \varepsilon_3)$, $i(k) \in I_3$,

де

$$\rho_1 > 0,\ \rho > 0,\ 0 < \varepsilon_1 < \rho,\ 0 < \varepsilon_3 < \rho,\ \varepsilon_2 > 0,$$

$$\Gamma_{s,i_k} \in C,\ \xi_{s,i_k} > 0,\ s = 1,2,3.$$

Для гіллястого ланцюгового *С*-дробу з нерівнозначними змінними

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \qquad (25)$$

де $i(k) = i_1 i_2 .. i_k$ – мультиіндекс, $i_0 = N$, N – кількість гілок розгалужень, $N \geq 2$, $a_{i(k)}$ – комплексні числа, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in C^N$.

Теорема 9. ГЛД (25) рівномірно збігається в замкненій області

$$D = \left\{ z \in C^N, \alpha \leq \left| z_p \right| \leq \beta, p = 1,2, \ldots N \right\}$$

до деякої голоморфної функції $f(z)$, якщо елементи дробу $a_{i(k)}$– комплексні числа, які задовольняють умови

$$|a_{i(k)}| \leq \begin{cases} \dfrac{r_1/\beta}{i_{k-1}-1}, \, якщо\, i(k) \in I_1; \\ \\ r/\beta, \, якщо\, i(k) \in I_3; \\ \end{cases}$$

$$|a_{i(k)}| \geq \frac{1}{\alpha}(2 + r_1)(1 + r_1 + r), \; i(k) \in I_2,$$

$$0 < r_1 < \frac{1 - 3r}{1 + r}, \; 0 < r < \frac{1}{3},$$

і справджується оцінка швидкості збіжності

$$\left| f - f_m \right| < M C_{N+m}^{N-1} q^{m+1},$$

де f *– значення ГЛД (25),* f_m *– його* m*-ий підхідний дріб,*

$$M = \left(\frac{r_1}{r} \right)^p, \; p = i_1 - i_{m+1} + 1, \; 1 \leq p \leq N$$

$$q = \frac{\alpha}{\beta}, \alpha = \sqrt{(2 + r_1)r}, \; \beta = \sqrt{1 - r_1 - r}.$$

Найбільш загальну параболічну область збіжності для ГЛД загального вигляду встановила Т .М. Антонова

Теорема 10. *Нехай існують такі додатні сталі* ε, $\varepsilon < 1$, *і* $\psi, \psi < \dfrac{\pi}{2(1+\varepsilon)}$

що для всіх можливих мультиіндексів елементів ГЛД

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1} \qquad (26)$$

задовольняються умови

$$\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\left|a_{i(k)}\right|-\mathrm{Re}\left(a_{i(k)}\exp(-i(\psi_{i(k-1)}+\psi_{i(k)})\right)}{\cos\psi_{i(k)}-p_{i(k)}}\le 2(1-\varepsilon)\,p_{i(k-1)},$$

де $\psi_{i(k)}$, $p_{i(k)}$ *– деякі дійсні числа такі, що*

$$\left|\psi_{i(n)}\right|\le\psi, n=0,1,2,\ldots;\ \ldots,0\le p_{i(k)}<(1-\varepsilon)\cos\psi_{i(k)}, k=1,2,\ldots,p_0\ge 0.$$

Тоді

1) значення всіх підхідних дробів ГЛД (1) скінченні і лежать у півплощині

$$V_0=\left\{w\in C:\mathrm{Re}\left(w\exp(-i\psi_0\right)\ge -p_0\right\};$$

2) існують скінченні границі підпослідовностей підхідних дробів $\{f_{2n}\}$, $\{f_{2n-1}\}$ *ГЛД (26);*

3) ГЛД (26) збігається, якщо розбігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\max\left|a_{i(k)}\right|\right)^{-1}.$$

В. Р. Гладун по новому став трактувати питання стійкості ГЛД, як стійкість до збурень, як неперервну залежність нескінченних ГЛД від своїх елементів.

Нехай

$$I_0=\{0\}, I_k=\{i(k):i_p=1,2,\ldots,N;\,p=1,2,\ldots,k\}, k\ge 1.$$

Розглянемо ГЛД

$$a_0\left(b_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1} \qquad (27)$$

і збурений до нього ГЛД

$$\hat{a}_0\left(\hat{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}}\right)^{-1} \tag{28}$$

з комплексними елементами. Послідовність не порожніх множин

$$\left\{\Omega_{i(k)}\right\}, \Omega_{i(k)} \subset C^2$$

назвемо послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (27), якщо для довільного ε, $\varepsilon > 0$, існує таке дійсне число δ, $\delta > 0$, що для кожного

$$\left(a_{i(k)}, b_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)},\ i(k) \in I_k,\ k \geq 0,$$

і кожного

$$\left(\hat{a}_{i(k)}, \hat{b}_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)},\ i(k) \in I_k,\ k \geq 0,$$

таких, що

$$\left|a_{i(k)} - \hat{a}_{i(k)}\right| < \delta, \quad \left|b_{i(k)} - \hat{b}_{i(k)}\right| < \delta,$$

виконуються нерівності

$$\left|f_n - \hat{f}_n\right| < \varepsilon,\ n \geq 0$$

де f_n, $\hat{f}_n$ – n-ті підхідні дроби ГЛД (27) і (28) відповідно.

Якщо ж всі

$$a_{i(k)} \neq 0,\ b_{i(k)} \neq 0,\ i(k) \in I_k,\ k \geq 0,$$

і для кожного

$$\left(a_{i(k)}, b_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)},\ i(k) \in I_k,\ k \geq 0,$$

і кожного

$$\left(\hat{a}_{i(k)}, \hat{b}_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)},\ i(k) \in I_k,\ k \geq 0,$$

таких, що

$$\left|\frac{a_{i(k)} - \hat{a}_{i(k)}}{a_{i(k)}}\right| < \delta,\ \left|\frac{b_{i(k)} - \hat{b}_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right| < \delta,$$

виконуються нерівності

$$\left|\frac{f_n - \hat{f}_n}{f_n}\right| < \varepsilon,\ n \geq 0,$$

то послідовність множин $\{\Omega_{i(k)}\}$ називають множинами відносної стійкості до збурень ГЛД (27).

Досліджено стійкість до збурень ГЛД з додатними, дійсними, зокрема, від'ємними, знакозмінними елементами, стійкість деяких підпослідовностей їх підхідних дробів. Особливо цікавим виявився факт збіжності, і тим більше стійкості, у випадку, коли частинні чисельники ГЛД є від'ємними. Це в принципі не можливо для неперервних дробів, в області

$$\{x \in R : x < -1/4\}.$$

Теорема 11. *Нехай відносні похибки елементів ГЛД (27) є рівномірно обмеженими. Тоді області*

$$\Omega_0 = (0, +\infty) \times (\nu_0, +\infty),\ \Omega_{i(k)} = \Omega_k = (0, \mu_k) \times (\nu_k, +\infty),\ i(k) \in I_k,\ k \geq 1,$$

де всі $\nu_k > 0$, $\mu_k > 0$*, є послідовністю областей відносної стійкості ГЛД (27), якщо розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_{k-1} \nu_k^2 \mu_k^{-1} (N\mu_{k+1} + \nu_k \nu_{k+1})^{-1}.$$

Досліджено також багатовимірні множини стійкості ГЛД з комплексними елементами, коли

$$(a_{i(k)1}, a_{i(k)2}, \ldots, a_{i(k)N}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)},\ \Omega_{i(k)} \subset C^{N+1},\ i(k) \in I_k,\ k \geq 0.$$

Цікавими і перспективними є дослідження збіжності ГЛД з матричними елементами. Нехай X – банахова алгебра квадратних матриць порядку p над полем C. Матричний ГЛД – це послідовність підхідних дробів:

$$F_1 = \sum_{i_1=1}^{N} b_{i_1}^{-1} a_{i_1} = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}},$$

$$F_2=\sum_{i_1=1}^{N}\left(b_{i_1}+\sum_{i_2=1}^{N}b_{i_1 i_2}^{-1}a_{i_1 i_2}\right)^{-1}a_{i_1}=\underset{k=1}{\overset{2}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}},\ \ldots,$$

де $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}\in X$ – квадратні невироджені $p\times p$ матриці. М. О. Недашковський встановив такий результат:

Теорема 12. *Матричний гіллястий ланцюговий дріб*

$$\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \qquad (29)$$

з елементами, що задовольняють умовам

$$\left\|b_{i(k)}^{-1}\right\|\le\left(1+\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\left\|a_{i(k+1)}\right\|\right)^{-1},\ i(k)\in I_k,\ k\ge 1,$$

абсолютно збігається, а його множиною значень є множина

$$\left\{z\in X:\|z\|\le\sum_{i_1=1}^{N}\left\|a_{i(1)}\right\|\right\}.$$

Для побудови розвинень функцій багатьох змінних у ГЛД використовуються два підходи: деякі рекурентні співвідношення для даних функцій, принцип відповідності між кратними степеневими рядами і функціональними ГЛД.

Перший підхід був використаний О.С. Манзій для побудови розвинень відношень гіпергеометричних функцій Аппеля

$$F_2(a,b,b';c,c';z),\ F_3(a,a',b,b';c;z).$$

Нею були встановлені нові рекурентні співвідношення для цих функцій, на основі яких побудовано і досліджено відповідність та збіжність розвинень їх відношень у ГЛД, встановлено оцінки похибок апроксимацій підхідними дробами в деяких обмежених областях. В роботах Н.П. Гоєнко апарат гіллястих ланцюгових дробів було використано для наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$F_D^{(N)}(a,b_1,b_2,\ldots,b_N;c;z_1,z_2,\ldots,z_N)=$$

$$= \sum_{k_1,k_2,\ldots k_N=0}^{N} \frac{(a)_{k_1+k_2+\cdots+k_N}(b_1)_{k_1}(b_2)_{k_2}\cdots(b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+k_2+\cdots+k_N}} \frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdots z_N^{k_N}}{k_1!k_2!\cdots k_N!},$$

де параметри a, $b_1,b_2,\ldots,b_N$; c – комплексні числа, $c \neq 0,-1,-2,\ldots$; $z_1,z_2,\ldots,z_N$ – комплексні змінні; $(\alpha)_k$ – символ Похгаммера.

Побудовано та досліджено багатовимірний аналог неперервного дробу $Nörlund'a$.

Теорема 13. *Нехай параметри функції F_D дійсні і задовольняють умови:*

$$a > 0,\ b_k > 0,\ k = \overline{1,N},$$

$$2c > a + \sum_{k=1}^{N} b_k + 1.$$

Відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$\frac{F_D(a,\bar{b};c;\bar{z})}{F_D(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;c+1;\bar{z})} \tag{30}$$

розвивається у ГЛД типу $Nörlund'a$

$$b_0(\bar{z}) + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(\bar{z})}{b_{i(k)}(\bar{z})}, \tag{31}$$

де

$$b_0(\bar{z}) = 1 - \frac{a+1}{c} z_1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{c} z_j,$$

$$b_0(\bar{z}) = 1 - \frac{a+1}{c} z_1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{c} z_j,$$

$$b_{i(k)}(\bar{z}) = 1 - \frac{a+k}{c+k} z_{i_k} - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j + p_{i(k)j}}{c+k} z_j,$$

$$p_{i(k)} = \sum_{m=1}^{k-1} \delta_{i_k}^{i_m} + \delta_{i_k}^{1},$$

який збігається рівномірно на компактах області

$$G = \left\{ \bar{z} \in C^N : \operatorname{Re} z_i < \frac{1}{2}, i = \overline{1, N} \right\}$$

до голоморфної функції, яка є аналітичним продовженням функції (30), голоморфної в деякому околі початку координат на область G.

Нерозв'язаною залишається проблема встановлення необхідних ознак збіжності для різних типів ГЛД. М. М. Бубняк означила і, використовуючи властивості гранично-періодичних і зворотних неперервних дробів, встановила ознаки поточкової і рівномірної збіжності періодичних ГЛД спеціального вигляду, зокрема дослідила овальні області збіжності для $\vec{p}$ – періодичних ГЛД. Зокрема, вона встановила таку необхідну ознаку збіжності 1-періодичного ГЛД

Теорема 14. *Нехай збігається 1-періодичний ГЛД з дійсними елементами*

$$\left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1} \right)^{-1}. \tag{33}$$

Тоді його елементи задовольняють умови:

$$c_q \geq -\frac{1}{4} X_q^2, q = 1, 2, \ldots, N,$$

де X_q *визначаються рекурентно*

$$X_q = \frac{1}{2}\left(X_{q-1} + \sqrt{X_{q-1}^2 + 4c_q} \right), \; X_0 = 1.$$

Якщо ж

$$c_q > -\frac{1}{4} X_q^2, q = 1, 2, \ldots, N,$$

то ГЛД (33) збігається.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Боднар Д. І., Кучмінська Х.Й. Гіллясті ланцюгові дроби (до 30-річчя виходу першої публікації) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 9-19.

2. Скоробогатько В.Я., Дронюк Н.С., Бобик О.І., Пташник Б.Й. Гіллясті ланцюгові дроби і їх застосування // Друга наук. конф. молодих математиків України. – К. : Наук. думка, 1966. – С. 561-565.

3. Боднарчук П.І., Скоробогатько В.Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К. : Наука, 1974. – 272 с.

4. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике.– М. : Наука, 1883. – 312 с.

5. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – К. : Наука, 1986. – 176 с.

6. Сявавко М.С. Інтегральні ланцюгові дроби. – К. : Наука, 1994. – 205 с.

7. Кучмінська Х.Й. Розвиток аналітичної теорії двовимірних неперервних дробів: дисертація доктора фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Кучмінська Христина Йосифівна. – Львів, 2012. – 306 с.

8. Дмитришин Р.І. Багатовимірні аналоги g-дробів, їх властивості, ознаки збіжності: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Дмитришин Роман Іванович. – Львів, 1998. – 128 с.

9. Манзій О.С. Наближення гіпергеометричних функцій Аппеля гіллястими ланцюговими дробами: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Манзій Олександра Степанівна. – Львів, 2000. – 142 с.

10. Гоєнко Н.П. Наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли гіллястими ланцюговими дробами: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Гоєнко Наталія Павлівна. – Львів, 2004. – 125 с.

11. Гладун В.Р. Аналіз стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Гладун Володимир Романович. – Львів, 2007. – 150 с.

12. Возна С.М. Наближення функцій неперервними та двовимірними неперервними дробами: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Возна Світлана Миколаївна. – Львів, 2008. – 146 с.

13. Баран О.Є. Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними: дисертація кандидата фіз.-

мат. наук: 01.01.01 / Баран Оксана Євгеніївна. – Івано-Франківськ, 2014. – 146 с.

14. Бубняк М.М. Множини збіжності періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Бубняк Марія Миколаївна. – Івано-Франківськ, 2016. – 151 с.

15. Макаров В.Л., Хлобистов В.В., Михальчук Б.Р. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби // Український математичний журнал. – 2003. – **55**, №4. – С. 479-488.

16. Пагіря М.М. Наближення функцій ланцюговими дробами.– Ужгород: Ґражда, 2016. – 412 с.

17. Пагіря М.М., Кацала Р.А. Властивості обернених похідних // Український математичний журнал. – 2010. – **62**, №5. – С. 708-713.

18. Недашковський М.О. Розв'язування нелінійно-поліноміальних рівнянь гіллястими ланцюговими дробами // International Journal of Computing. – 2014. – **2**, No. 1. – P. 83-87.

19. Недашковський М.О., Ковальчук О.Я. Очислення з λ-матрицями. – К.: Наук. думка, 2007. – 294 с.

20. Боднар Д. І., Возняк О.Г., Михальчук Р.І. Ознака збіжності гіллястого ланцюгового дробу з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 1. – С. 57-64.

21. Jones W.B., Thron W.J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. – Vol. 11. – Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company. – 1980. – 428 p.

22. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions. – Amsterdam-Paris: Atlantis Press/World Scientific, 2008. – Second edition – 308 p.

23. Perron O. Die Lehre von der Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Band 2. – 524 s.

24. Wall H.S. Analytic Theory of Continued Fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

25. Боднар Д. І. Аналітична теорія гіллястих ланцюгових дробів: історія,

основні результати, нерозв’язані проблеми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 21-29.

26. Антонова Т.М. Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів //Мат методи та фіз.-мех. поля. –1999. – **42**, №4. – С. 7-12.

27. Гладун В.Р. Умови збіжності та стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з від’ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –2003. – **46**, № 4. – С. 16-26.

28. Боднар Д. І., Гладун В.Р. Деякі області стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Вісник Чернівецького університету. Серія “Математика”. – 2006. – Вип. 288. – С. 18-27.

29. Боднар Д. І., Гладун В.Р. Про стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Математичні студії. – 2006. – **25**, № 2. – С. 207-212.

30. Недашковський М.О. Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 50-56.

31. Боднар Д. І., Манзій О.С. Дослідження збіжності розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 12-16.

32. Манзій О.С. Про збіжність розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб у деякій необмеженій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –1999. – **42**, № 2. – С. 7-11.

33. Гоєнко Н.П. Про збіжність розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли у гіллясті ланцюгові дроби // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці Інституту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 135-143.

34. Боднар Д. І., Гоєнко Н.П. Наближення відношення функцій Лаурічелли F_D гіллястим ланцюговим дробом // Математичні студії. – 2003. –

Т. 20, № 2. – С. 210-214.

35. Гоєнко Н., Антонова Т., Ракінцев С. Наближення відношення функцій Лаурічелли-Сарана F_S з дійсними параметрами гіллястими ланцюговими дробами // Математичний вісник НТШ. – 2011. – **8**. – С. 28-42.

36. Murphy J. A., O'Donohoe M. R. A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp. and Appl. Math. – 1978. – No. 4, №3. – P. 181-190.

37. Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М. Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30-44.

38. Kuchmins'ka Kh. Yo., Vozna S. M. Truncation error bounds for a two-dimensional continued g-fraction // Мат. студії. – 2005. – **24**, № 2. – P. 120-126.

39. Сусь О. М. Про оцінку швидкості збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип 4.– С. 115-123.

40. Антонова Т.М., Сусь О. М. Необхідні умови збіжності для одного класу двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Збірник праць Інституту математики НАН України. Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк. – 2015. – **50**, № 3. – С. 94-101.

41. Возна С.М. Збіжність двовимірного неперервного g-дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 39-43.

42. Siemaszko W. Branched continued fraction for double power series // J. Comp.and Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121-125.

43. Антонова Т.М., Боднар Д. І. Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів с спеціального вигляду // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАНУ. – 2000. – **31**. – С. 19-32.

44. Баран О. Є. Парні кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 73-80.

45. Баран О. Є. Деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 7-14.

46. Бубняк М. М. Оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Карпатські математичні публікації. – 2013. – **5**, № 2. – С. 187-195.

47. Боднар Д. І., Бубняк М. М. Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого дробу спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 24-32.

48. Bodnar D. I., Bubniak M. M. On Convergence (2,1,…,1)-periodic Branched Continued Fraction of the Special Form // Карпатські математичні публікації.. – 2015. – **7**, № 2. – С. 148-154.

49. Дмитришин Р.І., Баран О.Є. Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці ІМ НАН України. – Київ. – 2000. – Вип. 31. – С. 82-92.

50. Dmytryshyn R.I. The two-dimensional *g*-fraction with independent variables for double power series // Journal of Approximation Theory. – 2012. – **164**, № 12. – P. 1520-1539.

51. Дмитришин Р.І. Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1175-1184.

52. Bodnar D.I., Dmytryshyn R.I., On the convergence of multidimensional *g*-fraction // Матем. студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 115-126.

53. Гоєнко Н.П.Принцип відповідності та збіжність послідовностей аналітичних функцій багатьох змінних // Математичний вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 42-48.