ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Поливана Уляна
Науковий керівник – проф. Боднар Дмитро

ПАРНА І НЕПАРНА ЧАСТИНИ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ЗБІЖНОСТІ G-ДРОБІВ

Неперервні дроби є ефективним математичним апаратом для побудови раціональних наближень дійсних чисел, зокрема алгебраїчних ірраціональностей, чисел π і e. Розглядаються різні типи функціональних неперервних дробів: С-дроби, S-дроби, g-дроби, J-дроби, Т-дроби та інші. Їх підхідні дроби дають дробово-раціональні апроксимації аналітичних функцій, які часто збігаються швидше, ніж поліноміальні наближення і в ширших областях.

Нехай задано дві послідовності комплексних чисел $\{a_k\}, k = 1,2,3\ldots$, $\{b_p\}, p = 0,1,2,\ldots$. Неперервним дробом називають послідовність $\{f_n\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, де

$$f_0 = b_0, \quad f_n = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}, \qquad n = 1,2,3\ldots.$$

Для запису нескінченного неперервного дробу будемо використовувати позначення:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_2 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}$$

або

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots,$$

або

$$b_0 + D_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \tag{1}$$

Числа $a_n, n = 1,2,3\ldots$, називають частинними чисельниками, $b_n, n = 1,2,3\ldots$, – частинними знаменниками, f_n – n-ми підхідними дробами. Неперервний дріб (1) збігається, якщо існує скінченна границя його підхідних дробів.

Два неперервні дроби (1) і

$$d_0 + D_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{d_k} \qquad (2)$$

з підхідними дробами f_n і g_n, $n = 0,1,2,\dots$, відповідно називають еквівалентними, якщо $f_n = g_n, n = 0,1,2,\dots$. Дріб (2) є парною частиною дробу (1), якщо $g_n = f_{2n}$, $n = 1,2,3,\dots$, і непарною частиною, якщо $g_n = f_{2n+1}$,

$n = 1,2,\dots$ Парна і непарна частини неперервного дробу

$$\frac{1}{1} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{1} + \dots \qquad (3)$$

мають відповідно вигляд

$$\frac{1}{1+a_2} - \frac{a_2 a_3}{1+a_3+a_4} - \frac{a_4 a_5}{1+a_5+a_6} - \dots - \frac{a_{2k}a_{2k+1}}{1+a_{2k+1}+a_{2k+2}}, \qquad (4)$$

$$1 - \frac{a_2}{1+a_2+a_3} - \frac{a_3 a_4}{1+a_4+a_5} - \frac{a_5 a_6}{1+a_6+a_7} - \dots - \frac{a_{2k+1}a_{2k+2}}{1+a_{2k+2}+a_{2k+3}}. \qquad (5)$$

Скажемо, що для неперервного дробу (3) виконуються фундаментальні нерівності, якщо існують такі додатні сталі $r_p, p \geq 1$, що

$$r_1|1+a_2| \geq |a_2| \qquad (6.1)$$

$$r_2|1+a_2+a_3| \geq |a_3| \qquad (6.2)$$

$$r_p|1+a_p+a_{p+1}| \geq r_p r_{p-2}|a_p| + |a_{p+1}|, p = 3,4,5,\dots \qquad (6.3)$$

У монографії [8] доведено, що якщо нерівність (6.1) посилити, вимагаючи, щоб

$$r_1|1+a_2| \geq (1+k_1)|a_2|,$$

де $k_1 > 0$, то існує границя парних підхідних дробів (3), тобто збігається парна частина неперервного дробу (3).

Доведемо, що, якщо посилити (6.2), вимагаючи, щоб

$$r_2|1+a_2+a_3| \geq (1+k_2)|a_3|,$$

де $k_2 > 0$, то збігається непарна частина (3), тобто неперервний дріб (5).

Нехай

$$g_k = \frac{r_{2k+2}|1+a_{2k+2}+a_{2k+3}| - |a_{2k+3}|}{r_{2k+2}|1+a_{2k+2}+a_{2k+3}|}, k \geq 1$$

Тоді

$$g_1 = \frac{r_4|1+a_4+a_5| - |a_5|}{r_4|1+a_4+a_5|} \geq \frac{r_4 r_2|1+a_2+a_3||a_4|}{r_4|1+a_2+a_3||1+a_4+a_5|} \geq$$

$$\geq \frac{|a_3||a_4|(1+k_2)}{|1+a_2+a_3||1+a_4+a_5|}.$$

Тому існує комплексне число z_1, таке, що $|z_1| < 1$ і

$$\frac{a_3 a_4}{(1+a_2+a_3)(1+a_4+a_5)} = g_1 z_1.$$

Оскільки

$$g_k(1-g_{k-1}) = \frac{(r_{2k+2}|1+a_{2k+2}+a_{2k+3}|-|a_{2k+3}|)-|a_{2k+1}|}{r_{2k+2}|1+a_{2k+2}+a_{2k+3}|r_{2k}|1+a_{2k}+a_{2k+1}|} \geq$$

$$\geq \frac{|a_{2k+1}||a_{2k+2}|}{|1+a_{2k+2}+a_{2k+3}||1+a_{2k}+a_{2k+1}|},$$

то існують такі комплексні числа $z_k, |z_k| \leq 1$, що

$$\frac{a_{2k+1}a_{2k+2}}{(1+a_{2k+2}+a_{2k+3})(1+a_{2k}+a_{2k+1})} = g_k(1-g_{k-1})z_k, k = 2,3,4,\ldots$$

Виконавши еквівалентні перетворення, зведемо дріб (5) до вигляду

$$1 - \frac{|a_2|(1+a_2+a_3)^{-1}}{1} + \frac{g_1 z_1}{1} + \frac{g_2(1-g_1)z_2}{1} + \ldots + \frac{g_k(1-g_{k-1})z_k}{1} + \cdots$$

Отриманий неперервний дріб збігається за теоремою Ван Флека [8, Теорема 11.4, с.49]. Цей дріб еквівалентний неперервному дробу (5).

Уолл розглянув клас W нераціональних дійсних аналітичних функцій f(z) в області $|\arg(1+z)| < \pi$, для яких виконується умова $Re(\sqrt{1+z}f(z)) > 0$ в цій області, де береться головна гілка кореня. Було встановлено, що $f(z) \in W$ тоді і тільки тоді, коли f(z) зображується g-дробом.

$$f(z) = \frac{s_0}{1} + \frac{g_1 z}{1} + \frac{(1-g_1)g_2 z}{1} + \ldots + \frac{(1-g_{n-1})g_n z}{1} + \cdots \qquad (7)$$

де $s_0 > 0, 0 < g_n < 1$.

Граг В.Б. [5] означив π-дроби, тобто дроби вигляду

$$f(z) = \frac{\pi_0}{1+z} + \frac{z}{1} + \frac{\pi_1}{1+z} + \frac{z}{1} + \cdots \qquad (8)$$

де $\pi_n > 0$. Якщо $W_0'(z), W_0(z), W_1'(z), W_1(z), \ldots$ – підхідні дроби (8), то в області $|\arg(1+z)| < \pi$

$$|W_n(z) - W_n'(z)| \leq L(z)\left|\frac{1-\sqrt{1+z}}{1+\sqrt{1+z}}\right|^n, \qquad (9)$$

де $L(z) = \frac{\pi_0}{Re\sqrt{1+z}}\left|\sqrt{1+z} - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right|.$

Із оцінки (9) випливає збіжність π-дробу. Покажемо, що парною частиною дробу (8) є g-дріб, де $g_k = \frac{\pi_k}{1+\pi_k}$.

Спочатку побудуємо парну частину неперервного дробу (1) у припущенні, що $a_k \neq 0, b_k \neq 0, k = 1,2,3,\dots$.

Неперервний дріб

$$b_0 + D_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^*}{1}$$

де $a_1^* = a_1 b_1^{-1}, a_k^* = a_k b_{k-1} b_k^{-1}$ еквівалентний (1). Його парна частина має вигляд

$$\frac{1}{1-a_2^*} - \frac{a_2^* a_3^*}{1 + a_3^* + a_4^*} - \frac{a_4^* a_5^*}{1 + a_5^* + a_6^*} - \cdots - \frac{a_{2n-2}^* a_{2n-1}^*}{1 + a_{2n-1}^* + a_{2n}^*} - \cdots$$

Підставивши значення $a_k^*, k = 1,2,3,\dots$ і виконавши еквівалентні перетворення, отримаємо парну частину дробу (1)

$$b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4}{(b_2 b_3 + a_3) b_4 + b_2 a_4} - \frac{a_4 a_5 b_2 b_6}{(b_4 b_5 + a_5) b_4 + b_4 a_6} - \cdots$$

$$- \frac{a_{2n-2} a_{2n-1} b_{2n-4} b_{2n}}{(b_{2n-2} b_{2n-1} + a_{2n-1}) b_{2n} + b_{2n-2} a_{2n}} - \cdots \qquad (10)$$

Для π-дробу маємо $a_{2n} = z, a_{2n+1} = \pi_n(1+z)$. Підставивши ці значення в (10) отримаємо g-дріб (7). Із оцінки (9) випливає, що π-дріб збігається. Із збіжності послідовності випливає збіжність довільної її підпослідовності. Оскільки послідовність підхідних дробів g-дробу є підпослідовністю підхідних дробів π-дробу, то g-дріб (7) збігається у площині з розрізом $|\arg(1+z)| < \pi$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боднар Д.І., Дмитришин Р.І. Про деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична.–2008.–Вип. 68.–С.22–30.
2. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional g-fraction // Мат. студії. – 2001. – 15, № 2. – С. 115–126
3. Дмитришин Р. І. Багатовимірні аналоги g-дробів, їх властивості, ознаки збіжності: Дис. … канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Львів, 1998. – 128 с.
4. Дмитришин Р.І. Про збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 4. – С. 121–127.
5. Gragg W.B.Trincation error bounds g-fraction //Numershe mathematik.– v.11 P.370-379/
6. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions. – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – xii+308 p.
7. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Band II: Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche. – Stuttgart: B. G. Teubner, 1957. – vi+316 S.
8. Wall H. S. Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand Co., 1948. – XIII+433 p.