

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Грод Іван Миколайович

доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики та методики її навчання,
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

grodiv@tnpu.edu.ua

Грод Інна Миколаївна

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та методики її навчання,
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,

grodin@tnpu.edu.ua

Дослідження асимптотичної стійкості розв'язків системи диференціальних рівнянь зазвичай включає аналіз поведінки розв'язків у довгостроковій перспективі, тобто, як система буде вести себе, коли час прямує до нескінченності. Для цього використовують методи, які аналізують рівноважні точки системи та визначають їх стабільність, а також проводять чисельне моделювання для перевірки стійкості.

Використання інструментів Python (бібліотек SymPy, SciPy, Matplotlib), MATLAB або Maple дозволяє автоматизувати числові розрахунки, застосовувати адаптивні методи аналізу та візуалізувати результати. Це відкриває нові можливості для інтерактивного навчання студентів (Ткаченко П. В., 2020).

Розглянемо два основних приклади, що можуть бути корисними для дослідження асимптотичної стійкості розв'язків.

1. Модель Лотки-Вольтерри (модель хижаків і жертв).

Система рівнянь Лотки-Вольтерри описує взаємодію між популяціями хижаків і жертв у біології. Система виглядає так:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma x,\end{aligned}$$

де: x — кількість жертв, y — кількість хижаків, α , β , γ , δ — сталі, що характеризують швидкість росту популяцій і взаємодії між ними.

Асимптотичну стійкість цієї системи можна вивчити через рівноважні точки та їх стабільність. Результат роботи коду, написаної на Python програми, показав залежність кількості (жертв, хижаків) від часу (рис. 1).

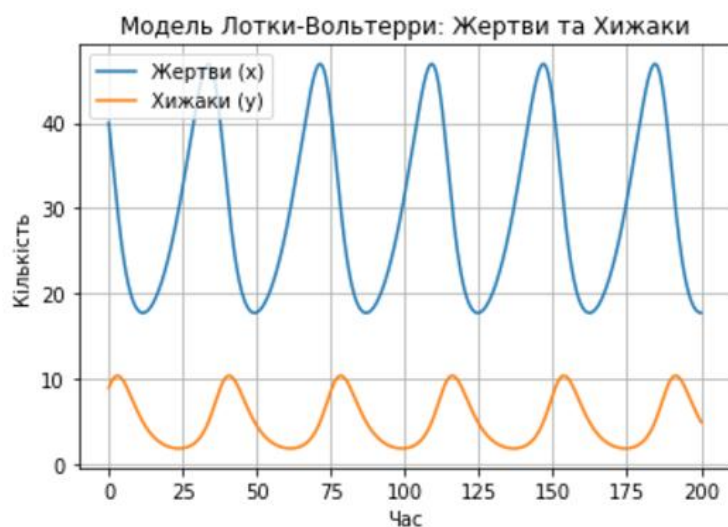


Рис. 1. Залежність кількості (жертв, хижаків) від часу

2. Лінійна система з двома змінними.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy,\end{aligned}$$

де a, b, c, d — сталі коефіцієнти. Для таких систем ми можемо визначити стійкість рівноважних точок, шукаючи власні значення матриці коефіцієнтів системи. Реалізація написаної на Python програми будує графіки лінійної системи диференціальних рівнянь (рис. 2).

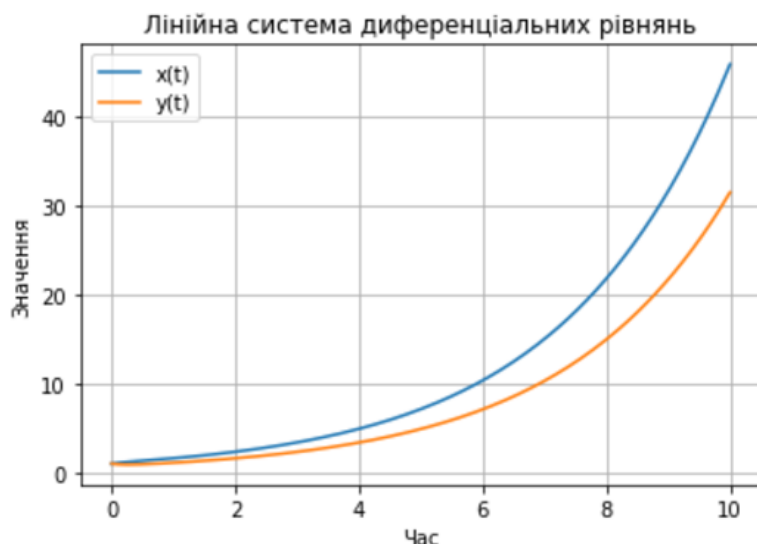


Рис. 2. Лінійна система диференціальних рівнянь

Для лінійних систем *рівноважні точки* визначаються з рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ i } \frac{dy}{dt} = 0$$

Це дасть систему рівнянь для визначення точок рівноваги.

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ i } \frac{dy}{dt} = 0$$

Для визначення *стійкості рівноважних точок* можна використати власні значення матриці системи. Якщо всі власні значення матриці з негативними дійсними частинами, точка є асимптотично стійкою. Якщо хоча б одне власне значення має позитивну дійсну частину, то рівноважна точка нестійка.

У реальних задачах, де система не є лінійною або точний аналіз не є можливим, можна використовувати чисельне інтегрування для вивчення поведінки системи при різних початкових умовах.

Для лінійних систем можна провести аналітичний аналіз стійкості за допомогою власних значень матриці, для нелінійних — використовувати чисельні методи для вивчення поведінки розв'язків.

Вивчення методик інтеграції засобів комп'ютерної математики з акцентом на числові методи та прикладний аналіз є актуальним у контексті сучасних потреб освіти (Бондаренко І. О., 2019).

Для дослідження стійкості та асимптотичної стійкості розв'язків системи нелінійних диференціальних рівнянь можна розглянути систему Ральфа та Лотки-Вольтерри (або спрощену її варіацію).

Система рівнянь виглядає так:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - x - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} &= -y(1 - \beta x - \gamma y),\end{aligned}$$

де: x — кількість жертв, y — кількість хижаків, α , β , γ — сталі, що впливають на взаємодію між популяціями.

Метою є дослідження стійкості рівноважних точок цієї системи, а також асимптотичної стійкості розв'язків. Визначення рівноважних точок і аналіз їх стійкості можна здійснити через лінійний аналіз на основі власних значень матриці Якобі.

Алгоритм:

1. Знайдемо рівноважні точки (значення x та y , де похідні рівні нулю).
2. Використаємо лінійний аналіз (аналіз власних значень матриці Якобі).
3. Побудуємо графіки, що ілюструють поведінку розв'язків.

Реалізація написаної на Python програми демонструє залежність кількості жертв (x) і хижаків (y) з часом (рис. 3).

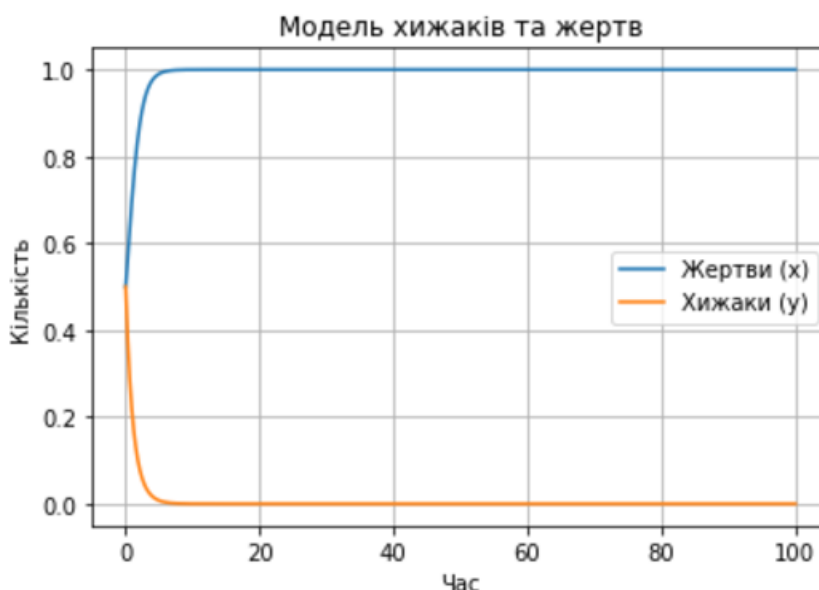


Рис. 3. Залежність кількості жертв (x) і хижаків (y) з часом

Пояснення. Для кожної з змінних x та y обчислюємо їх похідні згідно з рівняннями моделі Ральфа. Чисельне розв'язування: використовуємо `odeint` для чисельного інтегрування системи рівнянь з заданими початковими умовами $z_0=[0.5, 0.5]$ і параметрами α, β, γ . Графік показує зміну кількості жертв x і хижаків y з часом. *Дослідження стійкості рівноважних точок:* рівноважні точки досягаються, коли обидві похідні $\frac{dx}{dt} = 0$ і $\frac{dy}{dt} = 0$;

$$x(1 - x - \alpha y) = 0; y(1 - \beta x - \gamma y) = 0.$$

Розв'язування цих рівнянь дають рівноважні точки: (x^*, y^*) .

Для лінійного аналізу на основі матриці Якобі обчислюємо власні значення цієї матриці для кожної рівноважної точки. *Матриця Якобі* для системи рівнянь:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ де } f_1 = x(1 - x - \alpha y), f_2 = -y(1 - \beta x - \gamma y).$$

Потрібно знайти власні значення матриці J для кожної рівноважної точки. Якщо всі власні значення мають негативні дійсні частини, то точка є асимптотично стійкою.

Візуалізація. Графіки показують, як популяції хижаків і жертв змінюються з часом. Якщо система має асимптотично стійку рівноважну точку, то траєкторія буде тягнутися до цієї точки.

Визначення стабільності рівноважних точок та чисельне моделювання допомагають зрозуміти, як система буде поводитися в довгостроковій перспективі, що є важливим для розв'язування практичних задач. Ці методи дають змогу не лише теоретично, але й практично вивчати поведінку системи. Такий підхід дозволяє комплексно вивчити проблему і продемонструвати

практичні навички в галузі комп'ютерної математики для вирішення задач, пов'язаних з диференціальними рівняннями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бондаренко І. О. *Практичні задачі розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою MATLAB*. Одеса: ОНУ, 2019.
2. Ткаченко П. В. *Інструменти Python для аналізу диференціальних рівнянь*. Харків: ХНУ, 2020.

ФІЗИКА В АВТОМОБІЛЬНІЙ СПРАВІ: КОМПЕТЕНТІСНИЙ ПІДХІД ДО ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ

Касянчук Михайло Миколайович

доктор технічних наук, професор кафедри кібербезпеки, Західноукраїнський національний університет

kasyanchuk@ukr.net

Басістий Павло Васильович

кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики та методики її навчання, Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

basi@ukr.net

Сучасна інженерна освіта переживає період трансформацій, що зумовлює необхідність перегляду традиційних методів викладання фундаментальних дисциплін. Зокрема, фізика повинна викладатися з урахуванням особливостей спеціальностей, орієнтованих на практичне застосування знань, таких як «Автомобільний транспорт». У процесі професійної підготовки майбутніх фахівців важливо формувати здатність застосовувати фізичні закони та моделі у розв'язанні прикладних задач, пов'язаних із технікою та транспортними системами. Актуальність проблеми підкреслюється низкою досліджень українських учених у галузі методики викладання фізики — зокрема, роботи О. І. Ляшенка, О. В. Гузя, І. Ю. Тесленка та інших, які акцентують увагу на інтеграції змісту природничих наук із професійною підготовкою [3]. Вони обґрунтовують необхідність контекстного навчання, моделювання технічних ситуацій, розвитку критичного мислення та використання активних методів навчання для забезпечення більш глибокого і стійкого засвоєння матеріалу студентами технічних спеціальностей.

Фізика є основою для розуміння принципів роботи транспортних засобів: механіка руху, гідро- та аеродинаміка, термодинаміка, електрика, оптика, вібрація та акустика – усі ці розділи є важливими для майбутнього спеціаліста. Наприклад, знання законів Ньютона необхідне для аналізу сил, що діють на автомобіль при гальмуванні чи розгоні, а поняття тертя та опору середовища – для розрахунку витрат пального [5].