

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ДЛЯ ПОГЛИБЛЕННЯ РОЗУМІННЯ ОСНОВ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Василюк Іван Олександрович

здобувач другого рівня вищої освіти, спеціальність Середня освіта (Математика, фізика)
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка
ivasiluk003@gmail.com

Грод Іван Миколайович

доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики та методики її навчання
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка
grod@tnpu.edu.ua

Дослідження задачі Коші та умов існування й єдиності її розв'язків є важливою складовою математичного моделювання процесів у природничих і технічних науках. Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь широко застосовується при розв'язанні прикладних задач – зокрема, у динаміці систем взаємодіючих тіл (моделі руху матеріальних точок), хімічній кінетиці, аналізі електричних ланцюгів. Крім того, багато рівнянь у частинних похідних, у випадках, що допускають розділення змінних, зводяться до задач для звичайних диференціальних рівнянь [1].

Сформулюємо умови, що визначають існування і єдиність розв'язків диференціального рівняння. Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку). Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні у відкритій області D площини OXY і точка $(x_0; y_0) \in D$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$ [2].

Знайти розв'язок задачі Коші: $\frac{dy}{dx} = -2y$, при умові, що $y(0) = 1$ (1).

Ланцюжок простих очислень веде нас до розв'язку задачі: $\frac{dy}{dx} = -2y$, $\frac{dy}{2y} = -dx$,
 $\int \frac{dy}{2y} = - \int dx$, $\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = -x + c$, $\frac{1}{2} \ln(y) = -x + c$, $\ln(y) = -2x + 2c$, або
 $\ln(y) = -2x + c_1$, $y = e^{-2x+c_1}$, $y = e^{-2x} \cdot e^{c_1}$, $y = c_2 e^{-2x}$, $y(0) = 1$,
 $y(0) = c_2 e^0$, $y(0) = c_2 = 1$, Отже, отримали розв'язок задачі (1): $y = e^{-2x}$.

Ось приклад коду на Python, що знаходить розв'язок поставленої задачі (1).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
# Опис рівняння
def model(y, x):
    dydx = -2 * y
    return dydx
# Початкові умови
y0 = 1
x = np.linspace(0, 5, 100)
# Розв'язок рівняння
y = odeint(model, y0, x)
# Візуалізація результату
plt.plot(x, y)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Розв'язок рівняння dy/dx = -2y')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Результат роботи коду показано на рис. 1.

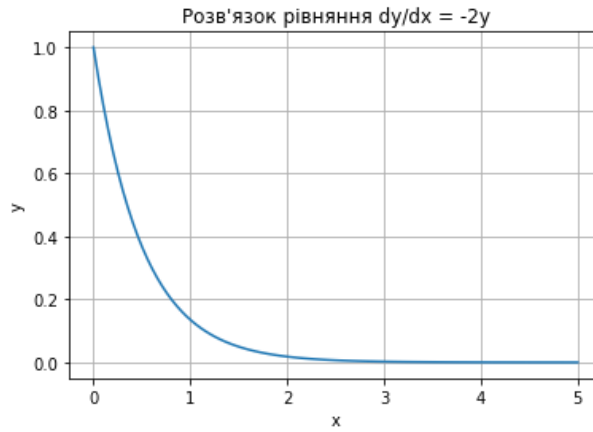


Рис. 1. Розв'язок задачі Коші (1)

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку може мати кілька розв'язків або не мати жодного, якщо не виконуються достатні умови існування та єдиності розв'язку – зокрема, умова Ліпшиця, яка є достатньою для гарантії існування та єдиного розв'язку. Розглянемо приклад нелінійного диференціального рівняння: $\frac{dy}{dt} = \sqrt{|y|}$, і задаємо початкову умову, як $y(0) = 0$.

Проведемо аналіз такої задачі Коші.

Для цього рівняння існує кілька можливих розв'язків. Ось чому задача Коші для нього не має єдиного розв'язку. Дійсно, якщо ми розглянемо початкові умови $y(0) = 0$, то функція $y(t) = 0$ є розв'язком цього рівняння. Однак, є також інший розв'язок, такий як $y = \frac{1}{4}t^2$, який задовольняють рівняння і туж початкову умову $y(0) = 0$.

Для того, щоб підтвердити що існують різні розв'язки поставленої задачі Коші, реалізуємо чисельне інтегрування з використанням методу Ейлера.

Отриманий код для знаходження і візуалізації розв'язків цієї задачі:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def y_solution(t, a):
    """Розв'язок із затримкою старту на [0,a]"""
    y = np.zeros_like(t)
    idx = t >= a
    y[idx] = 0.25 * (t[idx]-a)**2
    return y
t = np.linspace(0, 5, 500)
a_values = [0.0, 1.0, 2.0] # a=0: негайний старт, a=1,2: затримка
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def y_solution(t, a):
    """Розв'язок із затримкою старту на [0,a]"""
    y = np.zeros_like(t)
    idx = t >= a
    y[idx] = 0.25 * (t[idx]-a)**2
    return y
t = np.linspace(0, 5, 500)
a_values = [0.0, 1.0, 2.0] # a=0: негайний старт, a=1,2: затримка
plt.figure(figsize=(8,6))
# Розв'язки із затримкою
for a in a_values:
    plt.plot(t, y_solution(t, a), label=f"a={a}")
# Тривіальний розв'язок
plt.plot(t, np.zeros_like(t), linestyle='--', label="trivial y=0")
# Розв'язок y = (1/4) t^2
```

```
plt.plot(t, 0.25 * t**2, linestyle='-.', linewidth=2, color='black', label="y=1/4 * t^2")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("y")
plt.title("Розв'язки задачі Коші dy/dt = sqrt(|y|), y(0)=0")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Як результаті роботи коду програми ми отримуємо три різні криві:

Список розв'язків

1) $y_0(t) = 0$,

2) $y_1(t) = \frac{1}{4}t^2$,

Множина озв'язків, що залежні від параметра з «а-затримкою старту»

3) $y_a(t) = 0$ при $t \leq a$, $y_a(t) = \frac{1}{4}(t - a)^2$ при $t \geq a$, де $a \geq 0$

Запустивши код а виконання побачили, що для однієї й тієї ж початкової умови існує кілька різних розв'язків. Отриманий графік ілюструє, що задача Коші для цього диференціального рівняння не має єдиного розв'язку, тобто умова єдиності не виконується.

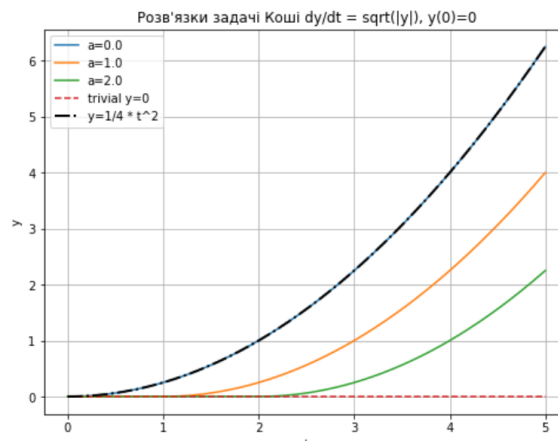


Рис. 2. Розв'язок задачі Коші для визначеного рівняння

Нами було розглянуто також задачу Коші для системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Для її рішення було застосовано чисельний метод Рунге-Кута. Отримано інтегральні криві та фазові портрети. Запропонована процедура рішення з використанням середовища розробки Jupyter Notebook.

Здійснення такого комп'ютерного експерименту дає змогу студентів сформулювати низку висновків, що поглиблюють розуміння основ теорії диференціальних рівнянь зокрема задачі Коші.

Через візуалізацію результатів на графіках студенти можуть глибше зрозуміти теоретичні концепції існування та єдиності розв'язків диференціальних рівнянь. Такий підхід дає змогу наочно спостерігати, що навіть за близьких початкових умов поведінка системи може суттєво відрізнятись.

Аналіз подібних прикладів сприяє формуванню розуміння того, що задача Коші не завжди має єдиний розв'язок, якщо не виконуються певні теоретичні передумови, зокрема умова Ліпшиця.

Комп'ютерний експеримент забезпечує наочне уявлення про складність задач Коші для нелінійних диференціальних рівнянь та демонструє можливі проблеми з існуванням і єдиністю розв'язку.

Такий підхід поглиблює розуміння теоретичних аспектів і підкреслює важливість перевірки умов, за яких розв'язки існують і є єдиними.

Список використаних джерел

1. Зайцев І. П., Бугайов В. М. Методика викладання математичного аналізу з використанням комп'ютерних технологій. Харків : Основа, 2016.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс диференціальних рівнянь. Київ : Вища школа, 2006.

ДИДАКТИЧНІ УМОВИ ЕФЕКТИВНОГО ВИКОРИСТАННЯ ГЕЙМІФІКАЦІЇ НА УРОКАХ ІНФОРМАТИКИ У 5–6 КЛАСАХ

Галушак Адріана Андріївна

здобувач другого рівня вищої освіти, спеціальність Середня освіта (Інформатика)
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка
galushchak_aa@fizmat.tnpu.edu.ua

Лень Андрій Володимирович

кандидат історичних наук, асистент кафедри інформатики та методики її навчання
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка
lenandr@tnpu.edu.ua

Сьогоднішня школа постійно зазнає змін: оновлення освітніх стандартів, використання цифрових технологій, поява нових способів спілкування та взаємодії. Незважаючи на усі нововведення в програмах та технологіях, головною слабкістю залишається внутрішня мотивація учнів для навчання. Проблема особливо відчутна у 5–6 класах, коли діти переходять від емоційно забарвленого й ігрового сприйняття знань до більш абстрактного й раціонального навчання. У початковій школі інтерес до навчання часто формується природним схваленням дорослих, а в середніх класах учні частіше стикаються із відчуттям, що вчитися потрібно лише через необхідність, що швидко призводить до втрати інтересу.

Подібна невідповідність помітна й на уроках інформатики: з одного боку, діти виявляють природний потяг до комп'ютерів, ігор та інтерактивного середовища, а з іншого – навчальні завдання нерідко не відповідають темпу та особливостям їхнього мислення. У традиційній школі переважає підхід «виконай вправу», тоді як сучасні учні очікують «пройди рівень». Система освіти ще не повною мірою адаптувалася до такої зміни навчальної мотивації. Як результат, уроки інформатики, які могли б стати своєрідними воротами до цифрового світу, сприймаються як простий набір правил і алгоритмів для оцінювання. Тому справа не лише в пошуку цікавих методичних прийомів, а у кардинальному переосмисленні моделі уроку інформатики, де навчання і гра стають не протилежностями, а підсилюють одне одного. Гейміфікація має розглядатися не як розвага між завданнями чи мотиваційний бонус, а як інтеграція ігрової логіки у саму структуру освітнього процесу. Чіткі цілі, видимий прогрес, відчутний результат і бажання продовжувати – це саме ті принципи гри, які можуть працювати на користь освіти. Від вчителя залежить, чи зможе він побудувати цей