УДК 378.147+330.46:004.9432

НАТАЛЯ ХАРАДЖЯН

МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАННЯ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ЧАСОВИХ РЯДІВ У СКМ SAGE

Розглянуто методичну систему мультифрактального аналізу в процесі професійної підготовки фахівців у галузі економічної кібернетики. Показано переваги застосування Web-СКМ Sage для роботи за спецкурсом «Моделювання складних економічних систем» за моделлю змішаного навчання.

Ключові слова: *професійна підготовка, електронне навчання, мультифрактальний аналіз, Web-СКМ, Sage.*

НАТАЛЬЯ ХАРАДЖЯН

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В СКМ SAGE

Рассмотрено методическую систему мультифрактального анализа в процессе профессиональной подготовки специалистов в области экономической кибернетики. Показано преимущества применения Web-СКМ Sage при работе в спецкурсе «Моделирование сложных экономических систем» по модели смешанного обучения.

Ключевые слова: *профессиональная подготовка, электронное обучение, мультифрактальный анализ, Web-СКМ, Sage.*

NATALJA KHARADZJAN

METHODOLOGICAL FOUNDATIONS OF E-LEARNING MULTIFRACTAL DETRENDED FLUCTUATION ANALYSIS OF TIME SERIES IN SCM SAGE

This article reviewed methodical system of multifractal analysis in the process of specialists training in economic cybernetics field. Advantages of Web-SCM Sage usage in course «Modeling complex economic systems» model for mixed education are shown.

Key words: *professional training, e-learning, multifractal analysis, Web- SCM, Sage.*

Критичні явища та динаміка фінансових ринків — одні з найбільш важливих і водночас наочних об’єктів дослідження економічної кібернетики. У класичних підручниках з ринкової динаміки ринки є ефективними, але такі події, як неконтрольований швидкий спад ринку, що можуть призвести до катастрофічного явища — краху, практично не розглядаються. Більшість статистичних фінансових моделей, наведених у них, базуються на припущенні про стаціонарність та ергодичність часових рядів і непридатних для аналізу крахів. У нових підручниках [1] на основі синергетичної та еконофізичної парадигми наголошується на тому, що реальні ринки є ієрархічними об’єктами, де кожен рівень може мати різні вагу, зв’язність, характерні часові та просторові масштаби (або ж не мати таких — масштабно інваріантні мультифрактальні об’єкти). Проблеми посилення нестабільності сучасної фінансово-економічної системи, яка особливо загострилась за останні кілька десятиріч, обумовила необхідність розробки методів та моделей раннього попередження криз, конструювання таких індикаторів-передвісників катастрофічних явищ, що б дозволили, аналізуючи сучасними методами стан та динаміку ринку, виявляти ознаки передкризових станів.

Тому для ідентифікації передкризових станів необхідно сконструювати індикатори за допомогою сучасних методів синергетики та еконофізики, таких як мультифрактального та вейвлет-аналізу, ентропійних методів, рекурентних діаграм тощо [1].

Одним з основних напрямів перебудови системи вищої професійної освіти в Україні є педагогічно обґрунтоване та виважене впровадження інноваційних ІКТ навчання. Як показали дослідження В. М. Соловйова, В. Штейна, С. В. Шокалюк, К. І. Словак, одним з ефективних засобів ІКТ за моделлю дистанційного навчання є Web-СКМ Sage.

Переваги впровадження засобів комп'ютерного моделювання у процес професійної підготовки майбутніх фахівців з економічної кібернетики показано в роботах В. М. Соловйова, Н. А. Хараджян та ін. Водночас питання застосування засобів комп'ютерного моделювання у Web-середовищі підтримки процесу навчання майбутніх фахівців з економічної кібернетики залишається недослідженою.

Саме тому доцільним є дослідження можливостей Web-СКМ Sage як засобу електронного навчання, з одного боку, і як середовище моделювання, з іншого, для підтримки навчання за спецкурсом «Моделювання складних економічних систем».

Метою статті є характеристика методичної системи електронного навчання мультифрактального аналізу.

Мультифрактальний аналіз детрендованих флуктуацій (МФ-АДФ) розглядається в спецкурсі «Моделювання складних економічних систем», спрямований на фундаменталізацію підготовки майбутніх фахівців з економічної кібернетики. Стандартний аналіз детрендованих флуктуацій використовується для визначення монофрактальних скейлінгових властивостей і довгочасових кореляцій в зашумлених нестаціонарних часових рядах. Проте багато економічних об'єктів не демонструють простої монофрактальної скейлінгової поведінки, що може бути визначена одним коефіцієнтом. МФ-АДФ дозволяє виконати якісну оцінку складності функціонування системи [4].

Загалом процедура МФ-АДФ складається з п'яти кроків.

Нехай є послідовність x_k довжини N, що не має великої кількості нульових значень.

Крок 1. Визначається профіль (накопичення):

$$Y(i) = \sum_{k=1}^{i}\left(x_k - \bar{x}\right),\ i = \overline{1..N} \qquad (1)$$

Віднімання середнього $\bar{x}$ є необов'язковим, оскільки може бути виконане пізніше детрендуванням на третьому кроці.

Крок 2. Профіль $Y(i)$ розбивається на $N_s = int\left(N/s\right)$ сегментів (підпослідовностей) однакової довжини s, що не перекриваються. Оскільки загальна довжина послідовності N часто не ділиться націло на s, залишок в кінці послідовності, що є меншим за ширину вікна, відкидається. Для врахування відкинутої частини і використання, таким чином, усіх елементів послідовності, вищевказана процедура повторюється також, починаючи з кінця послідовності. Таким чином, разом буде отримано $2N_s$ підпослідовностей.

Крок 3. Для кожної із $2N_s$ підпослідовностей обчислюється локальний тренд методом найменших квадратів. Потім визначається відхилення:

$$F^2(n,s) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\Big(Y\big((n-1)s+i\big) - y_n(i)\Big)^2, \qquad (2)$$

для кожного сегмента n, $n = \overline{1..N}$ і

$$F^2(n,s) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\Big(Y\big(N-(n-N_s)s+i\big) - y_n(i)\Big)^2, \qquad (3)$$

для кожного $n = \overline{N_s+1..2N_s}$. Тут $y_n(i)$ є інтерполюючий поліном на сегменті n.

Для інтерполяції використовуються лінійні, квадратичні, кубічні поліноми чи поліноми вищого порядку (традиційно називаються АДФ1, АДФ2, АДФ3 і т. д.). Оскільки детрендування часового ряду відбувається відніманням значень полінома від реальних значень ряду, АДФ різних порядків відповідно відрізняються у своїх можливостях по вилученню тренду в ряді. У МФ-АДФ m-го порядку вилучаються тренди профілю порядку m (або відповідно порядку (m – 1) для вихідного часового ряду). Таким чином порівняння результатів роботи АДФ різних порядків використовується для отримання типу тренду у вихідному часовому ряді.

Крок 4. Знаходиться середнє за всіма підпослідовностями для отримання функції флуктуацій q-го порядку:

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{n=1}^{2N_s} \left(F^2(s,n) \right)^{q/2} \right)^{1/q}, \tag{4}$$

де, взагалі кажучи, значення змінної q може бути довільним, за винятком нульового. Для $q = 2$ отримуємо стандартний метод АДФ. Для визначення того, як впливає часова шкала s за різних значень q на узагальнену залежність $F_q(s)$ від q, необхідно повторити кроки 2–4 для різних часових масштабів s. Цілком зрозуміло, що $F_q(s)$ буде збільшуватись зі збільшенням q. Крім того, $F_q(s)$ залежить також від порядку методу АДФ m. Згідно з побудовою, $F_q(s)$ визначене лише для значень s і $m+2$.

Крок 5. Визначається скейлінгова поведінка функції флуктуацій шляхом аналізу в подвійному логарифмічному масштабі залежності $F_q(s)$ від q. Якщо послідовність x_i має довгочасові кореляції, $F_q(s)$ збільшується зі збільшенням s відповідно до степеневого закону:

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}. \tag{5}$$

Загалом коефіцієнт $h(q)$ повинен залежати від q. Для стаціонарних часових рядів, $h(2)$ ідентичний коефіцієнту Херста. Таким чином, функцію $h(q)$ можна вважати узагальненим коефіцієнтом Херста.

Для монофрактальної часової послідовності $h(q)$ залежить від q; таким чином, скейлінгова поведінка відхилень $F^2(n,s)$ однакова на всіх сегментах n і процедура усереднення (4) дасть однакові значення скейлінгового коефіцієнта для всіх сегментів послідовності. Лише у випадку, коли масштаби малих і великих флуктуацій відрізняються, буде помітною залежність $h(q)$ від q: якщо розглядати додатні значення q, сегменти n з великими значеннями $F_s^2(n)$ (наприклад, великі відхилення від відповідних інтерполяційних поліномів) будуть домінувати у середньому значенні $F_q(s)$. Таким чином, для додатних значень q $h(q)$ описує скейлінгову поведінку сегментів із великими флуктуаціями. Зазвичай великі флуктуації характеризуються меншими скейлінговими коефіцієнтами $h(q)$ для мультифрактальних рядів. Навпаки, для від'ємних значень q сегменти V з малими відхиленнями $F_s^2(n)$ будуть домінувати у середньому значенні $F_q(s)$. Таким чином, для від'ємних значень q $h(q)$ описує скейлінгову поведінку сегментів з малими флуктуаціями, що характеризуються більшим скейлінговим коефіцієнтом.

Зазначимо, що метод МФ-АДФ може визначати лише *додатні* узагальнені коефіцієнти Херста $h(q)$, і стає неточним для сильно антикорельованих сигналів, коли $h(q)$ близьке до нуля. У таких випадках використовується модифікований МФ-АДФ аналіз. Більш простий спосіб для аналізу подібних даних — інтегрування часового ряду перед виконанням МФ-АДФ процедури (знаходження накопичень). Тоді, просте знаходження суми у (5), що описує профіль початкових даних, замінюється подвійним знаходженням суми

$$\tilde{Y}(i) = \sum_{k=1}^{i} \left(Y(k) - \bar{Y} \right). \tag{6}$$

Після цього виконується процедура МФ-АДФ, описана вище, внаслідок чого отримується узагальнена функція флуктуацій

$$\tilde{F}_q(s) \sim s^{\tilde{h}(q)} = s^{h(q)+1}. \tag{7}$$

Таким чином, скейлінгова поведінка може бути точно визначена навіть у випадку, коли $h(q)$ близьке до нуля (проте більше за –1) для деяких значень q. Зауважимо, що $\tilde{F}_q(s)/s$ відповідає $F_q(s)$ у формулі (5). Якщо на кожному кроці (6) не віднімається середнє значення, така сума, скоріш за все, дасть квадратичний тренд у профілі $\tilde{Y}(i)$. У цьому випадку необхідно використовувати щонайменше МФ-АДФ другого порядку для вилучення такого штучного тренду.

На основі описаного алгоритму для демонстрації МФ-АДФ на лабораторних заняттях, що проводиться за моделлю змішаного навчання, було створено програму з напіватоматичним режимом керування, що дозволяє використовувати дослідницький метод навчання. Для використання реконструктивного та евристичного методів навчання студентам необхідно запропонувати спробувати самостійно створити моделі: в першому випадку за аналогією, в другому — надати студентові «свободу дій».

Розглянемо перший варіант роботи, коли студенти використовують готову модель.

Програма МФ-АДФ була розроблена у Web-СКМ SAGE (рис. 1). Головні характеристики обраного середовища моделювання як засобу електронного навчання:

- виконання та зберігання математичних об'єктів у Web;
- виконання на широкому спектрі комп'ютерних пристроїв;
- організація спільної роботи студентів та викладача у єдиному мережному середовищі та ін. [2].

Розроблена модель дозволяє студентам обрати кількість значень для аналізу, початкову та кінцеву ширину сегмента, тип збільшення вікна тощо. Якщо у процесі виконання лабораторної роботи студенти мають доступ до Internet, то надається можливість зчитування даних з http://finance.yahoo.com/, якщо підключення відсутнє, студентам пропонується зчитування даних з наперед підготованого файлу.

Результатом процедури МФ-АДФ є сімейство коефіцієнтів $h(q)$ (узагальнені коефіцієнти Херста), що для мультифрактального сигналу формують спадну функцію, залежну від q, у той час як для монофрактального сигнала $h(q) = const$.

Під час розробки моделі було розширено функціональні можливості Web-СКМ Sage. До переліку основних функцій було додано такі функції: поліноміальна апроксимація за допомогою методу найменших квадратів, знаходження значення поліному з коефіцієнтами в матриці для аргументу, апроксимація сплайнами, розрахунок значення за допомогою сплайну для довільної точки.

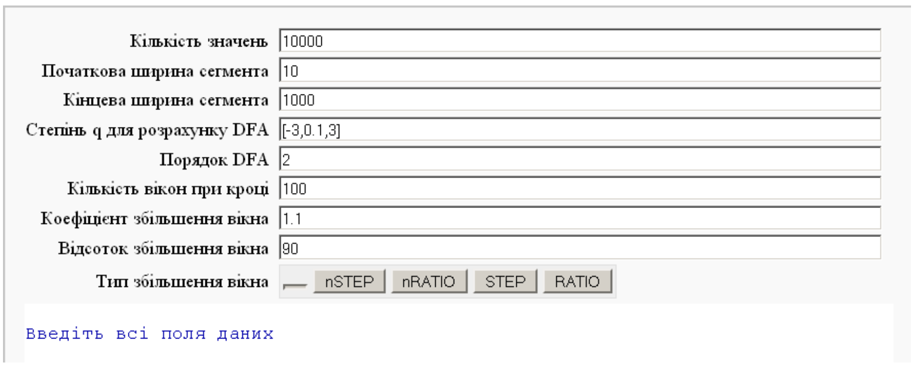

Рис. 1. Інтерфейс налаштування опцій реалізації моделі МФ-АДФ у Web-СКМ Sage

Для виконання МФ-АДФ у відкритому вікні необхідно провести відповідні налаштування. У полі «Початкова ширина сегмента» вказується найменша ширина сегментів s, на які розбивається вихідний ряд для проведення подальшого детрендування, а у полі «Кінцева ширина сегмента» – найбільша ширина сегментів. У полі «Степінь q для розрахунку DFA» вводиться найменше та найбільше значення степеня q та крок зміни значень з використанням синтаксису Sage для побудови значень ряду. Наприклад, рядок [–10, 1, 10] означатиме послідовність цілих чисел від –10 до 10 із кроком 1. Рекомендована послідовність степенів q = –3, –2.9, –2.8, ... , 3 ([–3, 0.1, 3]). «Порядок DFA» вибирається у відповідному полі (рекомендується аналізувати за допомогою 2-го порядку). Необхідно обрати «Тип збільшення вікна», яке буде обирати можливі значення ширини сегмента *s*:

- якщо обрано «nRATIO», то у полі «Кількість вікон при кроці» встановлюється кількість різних можливих значень сегментів *s*, які вибиратимуться для проведення аналізу, причому буде розраховано коефіцієнт *k*, такий, що $s_{i+1} = ks_i$;
- якщо обрано «STEP», то у полі «Крок збільшення вікна» встановлюється значення, на яке буде збільшено ширину сегмента наступної ітерації;
- якщо обрано «RATIO», то у полі «Коеф. збільшення вікна» встановлюється значення, на яке необхідно помножити *s* для отримання ширини наступних сегментів для подальшого видалення наступної ітерації;
- дія кнопки «nSTEP» аналогічна до дії кнопки «nRATIO», проте з відмінністю, що в даному випадку крок обирається програмою так, щоб між шириною найменшого та найбільшого сегмента можна було утворити ще $n - 2$ різних значень ширини (якщо це можливо), до того ж *n* вибирають з поля «Кількість вікон при кроці».

По закінченні розрахунку будується кілька функцій:

- у вікні «Розподіл *Fq*(*s*)» відображується розподіл залежності *Fq* від ширини сегменту *s* (рис. 2);
- у вікні «Розподіл *H*(*q*)» відображується розподіл залежності *h*(*q*) (рис. 3);
- у вікні «Розподіл τ(*q*)» відображується розподіл залежності *τ*(*q*) (рис. 4);
- у вікні «Розподіл *F(α)*, *α* розрахована через τ» відображується спектр мультифрактальності, отриманий за допомогою перетворення Лежандра (рис. 5);
- у вікні «Розподіл *F*(*α*), *α* розрахована через *h*» відображується спектр мультифрактальності, цей спектр є менш точним, ніж спектр, отриманий у попередньому пункті (рис. 6).

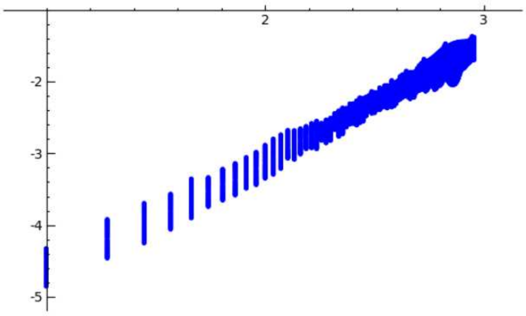

Рис. 2. Розподіл залежності F_q від ширини сегмента *s*

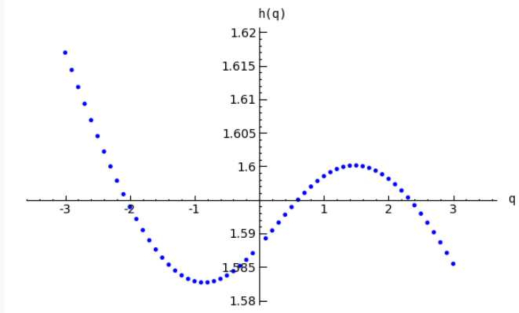

Рис. 3. Розподіл залежності *h*(*q*)

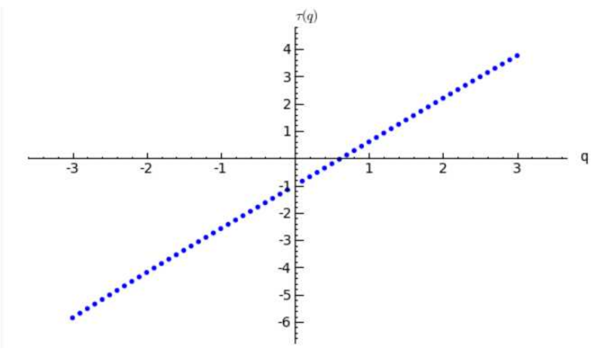

Рис. 4. Розподіл залежності τ(*q*)

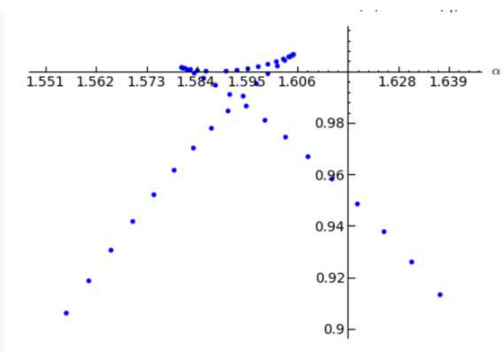

Рис. 5. Розподіл *F*(α), α розрахована через τ

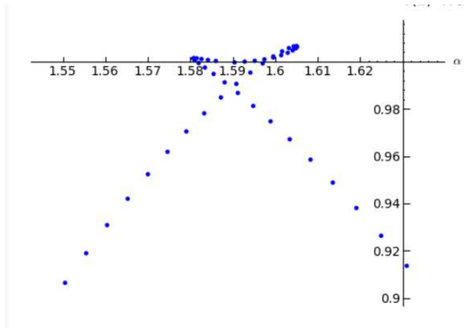

Рис. 6. Розподіл *F*(α), α розрахована через *h*

Розроблена демонстраційна модель для використання мультифрактального аналізу при дослідженнях складних економічних систем у вигляді програми з напівавтоматичним режимом роботи передбачає багаторазове виконання обчислень для різних значень вхідних параметрів та надає можливості:

- опрацьовувати часові ряди, отримані з мережі Internet;
- унаочнити процес застосування моделі, підвищити професійну спрямованість навчання моделювання;
- проводити навчально-наукові дослідження.

Для організації самостійної роботи студентів з розробки моделі необхідно навести алгоритм створення моделі та фрагменти програмного коду в особливо складних місцях.

Для створення демонстраційних програм з напіватоматичним або автоматичним режимом роботи, в яких передбачається багаторазове виконання обчислень для різних значень вхідних параметрів, використовують візуальні елементи управління типу «поле для введення», «ковзунок», «прапорець» та інші.

Для визначення й додавання елемента управління типу «поле для введення» в Sage призначена функція `input_box(default, label, type)`, де `default` — значення, що повертається функцією за замовчуванням; `label` — напис ліворуч від елемента; `type` — для отримання вхідних даних у вигляді довільного рядка.

Для створення елемента управління типу «прапорець» в SAGE призначена функція `checkbox(default, label)`, де `default`, що може мати значення `true` або `false`, `label` — назва «прапорця».

Для створення елемента «прапорець» у скороченому форматі достатньо вказати стан перемикача (увімкнений/вимкнений) — `cb1=true` або `cb2=false`.

Для створення елемента управління типу «меню вибору» в Sage призначена функція `selector(values, [label], [nrows], [ncols], [buttons])`, де `values` — значення пунктів меню вибору, що можуть зазначатися переліком елементів `[val1,val2,val3,...]` або діапазоном елементів `[val_start..val_finish]`; `label` — надпис ліворуч від елемента; `nrows` — кількість рядків у поданні пунктів меню вибору (при поданні пунктів меню вибору у вигляді кнопок); `ncols` — кількість колонок у поданні пунктів меню вибору (при поданні пунктів меню вибору у вигляді кнопок); `buttons` — додатковий параметр логічного типу: при встановленому значенні `true` меню вибору подається у вигляді кнопок, при встановленому значенні `false` (за замовчуванням) — у вигляді випадаючого списку.

Усі дії доречно оформити в окремі функції. Перелік функцій може бути таким:

`stock_load(kil)` — завантажує дані з підготовленого файлу або із сайту http://finance.yahoo.com/, де `kil` — кількість даних, що необхідна для проведення мультифрактального аналізу.

У результаті отримаємо часовий ряд та перетворюємо його на об’єкт класу `Finance` за допомогою модуля `TimeSeries`, який було розроблено Вільямом Штейном [5] для роботи з фінансовими часовими рядами.

Наприклад, X=finance.TimeSeries(X).

Функція MFDFA(X, windowWidthBegin, windowWidthEnd, POWERS, DFAORDER, kindOfElevate, valueOfElevate, koef) виконує мультифрактальний аналіз за алгоритмом, описаним в статті [3], де `X` — вектор часових значень; `windowWidthBegin` — початкова ширина вікна; `windowWidthEnd` — кінцева ширина вікна, де `windowWidthBegin < windowWidthEnd`; `POWERS` — вектор степенів, для яких розраховувати DFA (*q*); `DFAORDER` — порядок DFA (1, 2, 3, ...); `kindOfElevate` — тип збільшення вікна; `valueOfElevate` — значення для збільшення вікна; `koef` — коефіцієнт збільшення вікна.

Наприклад: `[S,Fq,Q]=MFDFA(X,10,1000,[-,0.1,3],'STEP',100,1.1).`

У результаті виконання отримаємо: `S` — вектор-рядок значень ширини вікна; `FqS` — значення варіацій для вікон відповідної ширини (з масиву S) та степеня $q(Fq(S))$;

`Q` — вектор-стовпчик степенів Q.

Функція `MFDFAOneStep(Y,S,ORDER)` – обчислює значення $F^2(n,s)$ (кроки 2 та 3), де `Y` — вектор профілю, повинен містити 1 рядок; `S` — ширина вікна; `ORDER` — степінь поліному, що описує тренд.

Після виконання розрахунків отримаємо:

`F2` — вектор значень функції $F^2(n,s)$;

`Ns` – кількість вікон вказаної ширини.

У результаті виконання наступних функції отримуємо набір значень від яких потім будуємо залежності.

Функція `MFDFAHTau(S,FqS,Q)` – визначає залежність $h(q)$ та $t(q)$, де `S` — вектор-рядок значень ширини вікна; `FqS` — матриця значень $Fq(s)$; `Q` — вектор-стовпчик значень *q*.

Отримаємо: `Hq` — вектор-рядок значень $h(q)$; `TAUq` — вектор-рядок значень $t(q)$; `Q` — вектор-рядок значень *q*.

Функція `MFDFAAlphaFTAUSpline(Q, TAUq, percFunction)` визначає `alpha` та `F(alpha)`, розраховане через τ, де `Q` — вектор-рядок значень *q*; `Hq` — вектор-рядок значень $t(q)$.

Отримаємо:

`ALPHA` – значення аргументів α;

FALPHA – значення функції $F(\alpha)$.

Функція `MFDFAAlphaFHSpline(Q, Hq, percFunction)` – визначення `alpha` та `F(alpha)` розраховане через `q`, де `Q` — вектор-рядок значень *q*; `Hq` — вектор-рядок значень *h*(*q*).

Отримаємо: `ALPHA` — значення аргументів α; `FALPHA` — значення функції $F(\alpha)$.

З отриманих значень створюємо список залежностей та зображуємо графік, наприклад:

```
# розподілення F(alpha), alpha розрахована через tau
ALPHA, FALPHA=MFDFAAlphaFTAUSpline(Q,TAUq,percFunction)
html("Розподілення F(alpha), alpha розрахована через tau")
r1=[]
for i in range (0,len(ALPHA)):
    r1.append([ALPHA[i],FALPHA[i]])
p=point(r1)
p.axes_labels(("$\\alpha$",'f($\\alpha$) from $\\tau$(q)'))
show(p)
```

Для реалізації моделі мультифрактального аналізу необхідні наступні допоміжні функції:

`GeneralMinSquare(X,Y,POWERS)` — поліноміальна апроксимація за допомогою методу найменших квадратів, де `X` — вектор часових значень; `Y` — вектор часових значень; `POWERS` — ступінь полінома.

`GetPoly(A,X)` — знаходження значення поліному з коефіцієнтами в матриці `A` для аргументу `X`, де `A` — коефіцієнти поліному у порядку зростання $A + A^2 ЧX + A^3 ЧX^2 + \ldots$; `X` — обчислювальне значення.

Функція визначає кількість коефіцієнтів поліному та обчислює його значення.

`natural_spline(X,DATA)` — апроксимація сплайнами, де `X` — вектор часових значень; `DATA` — дані для апроксимації.

Для студентів, що самостійно розробляють програму, пропонується першоджерело, у якому подано алгоритм мультифрактального аналізу.

Висновки. Електронне навчання комп'ютерного моделювання у процесі професійної підготовки фахівців з економічної кібернетики сприяє розвитку уваги, уяви, спостережливості, нестандартності мислення, інтересу до професійної діяльності; формуванню цілісного наукового світогляду з інформаційних технологій, інформаційного стилю мислення; заповненню прогалин у знаннях, уміннях і навичках з фундаментальних дисциплін; розвитку вмінь самонавчання, саморозвитку та самовдосконалення у сфері інформаційних технологій.

Перспективи подальших досліджень. Розробка методичних основ електронного навчання рекурентного та кластерного аналізу фахівців з економічної кібернетики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем : монографія / [В. М. Соловйов, В. Д. Дербенцев, О. А. Сердюк, О. Д. Шарапов.] — Черкаси : Брама-Україна, 2010. — 287 с.
2. Хараджян Н. А. ММС SAGE в моделюванні економічних процесів / Н. А. Хараджян, С. О. Семеріков // Інформаційні технології та моделювання в економіці : зб.наукових праць Другої Міжнародної науково-практичної конференції ; Черкаси, 19–21 травня 2010 р. — Черкаси : Брама-Україна, 2010. — С. 259–261.
3. Kantelhardt J. W. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series / Jan W. Kantelhardt, Stephan A. Zschiegner, Eva Koscielny-Bunde, Armin Bunde, Shlomo Havlin, H. Eugene Stanley // Physica A : Statistical Mechanics and its Applications. — 2002. — Volume 316. — Issues 1-4. — P. 87–114.
4. Oswiencimka P. Wavelet versus Detrended Fluctuation Analysis of multifractal structures / Pawel Oswiencimka, Jaroslav Kwapien, Stanislav Drozdz // Phys. Rev. E. — 2006. — Volume 74. — 1ssue 1. — 016103. — 17 p.
5. Stein W. Sage Programming Guide. / Stein W., Joyner D. — 2008. — 86 p.