УДК 517.9

©2018 р. В.Д. Галан, І.М. Грод, В.Р. Кравчук

Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МНОГОЧЛЕНАМИ НА ДОВІЛЬНОМУ ПРОМІЖКУ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА

Розглянуто алгоритм побудови многочленів для наближення функції на довільному проміжку з області її визначення. Показано, що для функції $y = e^x$ цей алгоритм дозволяє будувати многочлени n-го степеня, які здійснюють її асимптотично найкраще наближення.

Ключові слова: наближення функцій, асимптотично найкраще наближення, інтегральні рівняння Вольтерра.

The article describes algorithm for construction of polynomials for approximation of function on arbitrary interval from the range of its definition. It is shown that for the function $y = e^x$ this algorithm allows us to construct polynomials of n-th degree, which make its asymptotically best approximation.

Keywords: approximation function, asymptotically best approximation, Volterra integral equations.

Нехай функція $y(x), x \in [-h;\ h], h > 0$, є розв'язком задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з многочленними коефіцієнтами або еквівалентного їй інтегрального рівняння Вольтерра

$$a_0(x)y(x) = \int\limits_0^x K_m(x,t)y(t)dt + P(x),$$

де $K_m(x,t)$ – многочлен від змінних x і t, $a_0(x)$ і $P(x)$ – многочлени від змінної x, до того ж $a_0(x) > 0$ для будь-якого $x \in [-h; h]$.

Для наближення функції $y(x)$ многочленами можна використати апроксимаційний метод (A-метод), розроблений В. К. Дзядиком [1]. Цей метод зручний тим, що для наближення функції $y(x)$ достатньо знати лише те, що вона є розв'язком зазначеного інтегрального рівняння, тобто його можна використовувати для пошуку наближених розв'язків таких рівнянь. Крім того, А-метод є основою двох способів раціональної апроксимації функцій: раціонально апроксимаційного методу (PA-методу) [2] і "лінійного"способу раціональної апроксимації [4, 5].

У роботі В. К. Дзядика [3] A-метод використаний для наближення деяких елементарних функцій – ним побудовані многочлени, які здійснюють їх асимптотично найкраще або найкраще по порядку наближення.

Зазначимо, що A-метод можна використовувати для наближення функцій многочленами на симетричному проміжку $[-h; h]$.

Якщо для деякої функції $y(x)$ потрібно побудувати апроксимаційний многочлен n-го степеня, який здійснював би її наближення на несиметричному проміжку $[x_0-h; x_0+h]$, де $h > 0$, x_0 – деяке дійсне число, то можна дотримуватися такого алгоритму:

1) зробивши заміну $x = u + x_0$, отримати функцію $y(u + x_0)$, визначену на симетричному проміжку $[-h; h]$;

2) побудувати для функції $y(u+x_0)$ апроксимаційний многочлен $P_n(u)$ за A-методом (якщо це можливо);

3) повернувшись до заміни, матимемо многочлен $P_n(x - x_0)$, який здійснює наближення функції $y(x)$ на проміжку $[x_0-h; x_0+h]$.

Для ряду функцій $y(x), x \in [x_0-h; x_0+h]$, даний алгоритм дозволяє будувати многочлени n – го степеня, які здійснюють їх асимптотично найкраще наближення. Так, розглядаючи функцію $y = e^x$, $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$, одержано такий результат.

Теорема. Для функції $y = e^x$, $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$, і многочлена

$P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} c_i(x-x_0)^i,$

де $c_i=\frac{\tau}{i!}\sum\limits_{j=i+1}^{n+1} j!h^{-j}t_j,\ i=\overline{0,n}\,;$

$\tau=e^{x_0}\left(\sum\limits_{j=0}^{n+1} j!h^{-j}t_j\right)^{-1}$; t_j– коефіцієнти многочлена Чебишова $T_{n+1}(x)=\sum\limits_{j=0}^{n+1} t_jx^j$,

виконується рівність

$$\|e^x-P_n(x)\|_{C_{[x_0-h;x_0+h]}}=$$

$$=\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)E_n(e^x)_{C_{[x_0-h;x_0+h]}}.$$

Доведення. Зробивши заміну $x=u+x_0$, отримаємо функцію

$$y(u)=e^{u+x_0},$$

де $u\in[-h;h]$. Ця функція є розв'язком задачі Коші

$$y'(u)-y(u)=0\ ;y(0)=e^{x_0}$$

та еквівалентного їй інтегрального рівняння Вольтерра

$$y(u)=\int\limits_0^u y(z)dz+e^{x_0}. \qquad (1)$$

Використовуючи A-метод, функцію $y(u)=e^{u+x_0}$, $u\in[-h;h]$, наближатимемо многочленом $y_n(u)=\sum\limits_{i=0}^{n} c_iu^i$, який є розв'язком рівняння

$$y_n(u)=\int\limits_0^u y_n(z)dz+e^{x_0}-\tau T_{n+1}\left(\frac{u}{h}\right), \quad (2)$$

де τ – деяка стала.

Із цього рівняння маємо:

$$\sum_{i=0}^{n} c_iu^i=\sum_{i=0}^{n} c_i\frac{u^{i+1}}{i+1}+e^{x_0}-\tau\sum_{i=0}^{n+1} t_i\left(\frac{u}{h}\right)^i.$$

Прирівнявши в останній рівності коефіцієнти при однакових степенях u, отримаємо систему $n+2$ лінійних рівнянь з $n+2$ невідомими c_0, c_1, ..., c_n і τ, з якої знаходимо:

$$c_i=\frac{\tau}{i!}\sum_{j=i+1}^{n+1} j!h^{-j}t_j, i=\overline{0,n}\,;$$

$$\tau=e^{x_0}\left(\sum_{j=0}^{n+1} j!h^{-j}t_j\right)^{-1}.$$

Розглянемо різницю $y(u)-y_n(u)=r_n(u)$. Віднявши почленно від рівності (1) рівність (2), одержимо інтегральне рівняння

$$r_n(u)=\int\limits_0^u r_n(z)dz+\tau T_{n+1}\left(\frac{u}{h}\right).$$

Знайшовши $r'_n(u)$ та $r_n(0)$, замінимо дане інтегральне рівняння еквівалентною йому задачею Коші:

$$r'_n(u)=r_n(u)+\frac{\tau}{h}T'_{n+1}\left(\frac{u}{h}\right),$$

$$r_n(0)=\tau t_0.$$

Легко переконатися, що розв'язком цієї задачі Коші є функція

$$r_n(u)=\tau\Bigg(T_{n+1}\Big(\frac{u}{h}\Big)+$$

$$+\int\limits_0^u e^{u-z}T_{n+1}\left(\frac{z}{h}\right)dz\Bigg) \qquad (3)$$

.

Нехай

$$P_n(x)=y_n(x-x_0).$$

Тоді

$$e^x-P_n(x)=e^x-y_n(x-x_0)=r_n(x-x_0).$$

Оцінимо норму

$$\|e^x-P_n(x)\|_{C_{[x_0-h;\,x_0+h]}}=$$

$$=\|r_n(x-x_0)\|_{C_{[x_0-h;\,x_0+h]}}.$$

Для цього повертаємось у формулі (3) до заміни і одержуємо:

$$r_n(x-x_0)=\tau\Bigg(T_{n+1}\Big(\frac{x-x_0}{h}\Big)+$$

$$+\int\limits_0^{x-x_0} e^{x-x_0-z}T_{n+1}\left(\frac{z}{h}\right)dz\Big). \quad (4)$$

Нехай

$$\alpha_n=\alpha_n(x)=\int\limits_0^{x-x_0} e^{x-x_0-z}T_{n+1}\left(\frac{z}{h}\right)dz\,.$$

Тоді рівність (4) матиме вигляд

$$r_n(x-x_0)=\tau\left(T_{n+1}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+\alpha_n\right), \quad (5)$$

Далі, використовуючи другу теорему про середнє для інтегралів і нерівність [6]

$$\left|\int\limits_0^t T_n\left(\frac{z}{h}\right)dz\right|<\frac{2h}{n-1},$$

де $t\ \in[-h;h]$, одержимо оцінку:

$$|\alpha_n|<\frac{2he^h}{n}.$$

Отже, якщо $n>2he^h$, то $\mid \alpha_n \mid< 1$.

З рівності (5) випливає, що для таких значень n різниця $r_n(x-x_0)$ в $n+2$ точках $s_k\ =\ x_0-h\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k\ =\ \overline{0,n+1}$ набуває значень, знаки яких почергово змінюються. Тому на основі теореми Валле-Пуссена для $n>2he^h$ матимемо:

$$E_n(e^x)_{C_{[x_0-h\,;x_0+h]}}\geq$$

$$\geq\min_{k=\overline{0;\,n+1}}|r_n(s_k-x_0)|=$$

$$=\min_{k=\overline{0;\,n+1}}\left|\tau\left(T_{n+1}\left(\frac{s_k-x_0}{h}\right)+\alpha_n\right)\right|\geq$$

$$\geq|\tau|\left(1-|\alpha_n|\right),$$

звідки

$$|\tau|\leq\frac{1}{1-|\alpha_n|}E_n(e^x)_{C_{[x_0-h\,;x_0+h]}}.$$

Враховуючи рівність (5) і одержану нерівність, для будь-якого $x\in[x_0-h;x_0+\ h]$ матимемо:

$$|r_n(x-x_0)|\leq$$

$$\leq|\tau|\left(\left|T_{n+1}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\right|+|\alpha_n|\right)\leq$$

$$\leq|\tau|\left(1+|\alpha_n|\right)\leq\frac{1+|\alpha_n|}{1-|\alpha_n|}E_n(e^x)_{C_{[x_0-h;x_0+h]}}.$$

У такому випадку

$$\|e^x-P_n(x)\|_{C_{[x_0-h;x_0+h]}}=$$

$$=\|r_n(x-x_0)\|_{C_{[x_0-h;x_0+h]}}\leq$$

$$\leq\frac{1+|\alpha_n|}{1-|\alpha_n|}E_n(e^x)_{C_{[x_0-h;x_0+h]}}.$$

Оскільки

$$\|e^x-P_n(x)\|_{C_{[x_0-h;x_0+h]}}\geq$$

$$\geq E_n(e^x)_{C_{[x_0-h;x_0+h]}},$$

то з останніх двох нерівностей маємо:

$$\|e^x-P_n(x)\|_{C_{[x_0-h\,;x_0+h]}}=$$

$$=\left(1\,+\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right)E_n(e^x)_{C_{[x_0-h;x_0+h]}}.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Співвідношення, одержані у доведенні теореми, дозволяють оцінити величину найкращого наближення функції $y=e^x$, $x\in[x_0-h;x_0+\ \ h]$, многочленами степеня не вище n. Так, з нерівностей

$$\|e^x-P_n(x)\|_{C_{[x_0-h\,;x_0+h]}}\leq|\tau|\left(1+|\alpha_n|\right)$$

і

$$\|e^x-P_n(x)\|_{C_{[x_0-h\,;x_0+h]}}\geq|\tau|\left(1-|\alpha_n|\right),$$

випливає, що

$$\|e^x-P_n(x)\|_{C_{[x_0-h\,;x_0+h]}}=\left(1\,+\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot|\tau|$$

або

$$E_n(e^x)_{C_{[x_0-h\,;x_0+h]}}=\left(1\,+\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot|\tau|\,.$$

Оцінивши $\mid\ \tau\ \mid$ для випадку $h\ <\ 2$, одержимо асимптотичну рівність для величини найкращого рівномірного наближення:

$$E_n(e^x)_{C_{[x_0-h\,;x_0+h]}}=$$

$$= \frac{2e^{x_0}}{(n+1)\,!} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

де $h < 2$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Київ: Наук. думка, 1988. – 304 с.

2. *Дзядык В. К.* А-метод и рациональная аппроксимация. // Укр. мат. журн. –1985. – **37**, № 2. – С. 250–252.

3. *Дзядык В. К.* Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций $e^x, sin(x)$ и др. // Укр. мат. журн. –1985. –**25**, № 5. – С. 435–453.

4. *Кравчук В. Р.* Лінійний спосіб раціональної апроксимації порядку (n, 2) цілих елементарних функцій. // Наукові записки Тернопільського державного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія 11: Математика і фізика. № 1 – 1998. – С. 27–30.

5. *Кравчук В. Р.* Про один простий спосіб раціональної апроксимації функцій. // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 7. – С. 248–253.

6. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. — М.: Наука, 1983. – 384 с.