

УДК 517.524

ПАРАБОЛІЧНІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Ірина Біланік

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені
Я. С. Підстригача НАН України, Тернопільський національний
педагогічний університет імені В. Гнатюка, i.bilanyk@ukr.net

Об'єктом досліджень є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) спеціального вигляду

$$\left(b_0 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right)^{-1}, \quad (1)$$

де $b_0, a_{i(k)}, b_{i(k)} \in \mathbb{C}, i(k) \in \mathcal{I}$,

$$\mathcal{I} = \{i(k) = (i_1, i_2, \dots, i_k) : 1 \leq i_k \leq i_{k-1} \leq \dots \leq i_0; k \geq 1; i_0 = N\}.$$

Для цих дробів досліджено параболічні області збіжності. Зокрема, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай при фіксованих частинних знаменниках дроби (1), що належать областям*

$$\mathcal{B}_{i(k)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > p_{i(k)}^* \right\}, \quad p_{i(k)}^* = \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} p_{i(k+1)}, \quad p_{i(k)} > 0,$$

тобто $b_{i(k)} \in \mathcal{B}_{i(k)}, i(k) \in \mathcal{I}, \Re(b_0) > \sum_{i_1=1}^N p_{i(1)}$, частинні чисельники цього дроби належать параболічним областям

$$\mathcal{P}_{i(k)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \Re \left(z e^{-i(\arg b_{i(k)} + \arg b_{i(k-1)})} \right) < 2p_{i(k)} (1 - \varepsilon) \left(|b_{i(k)}| - p_{i(k)}^* \right) \right\},$$

тобто $a_{i(k)} \in \mathcal{P}_{i(k)}, a_{i(k)} \neq 0, i(k) \in \mathcal{I}$, де ε – довільне мале дійсне число ($0 < \varepsilon < 1$).

Тоді

1) існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів ГЛД (1);

2) ГЛД (1) збігається якщо, розбігаються ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\left| \frac{b_{m[p]} b_{m[p+1]}}{a_{m[p+1]}} \right|}, \quad m = \overline{1, N},$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\left| \frac{b_{i(n), m[p]} b_{i(n), m[p+1]}}{a_{i(n), m[p+1]}} \right|}, \quad i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}, \quad m = \overline{1, N-1};$$

де $m[p] = \underbrace{m, m, \dots, m}_p$; $p = 1, 2, \dots$,

$\mathcal{I}^{(m+1)} = \{i(k) = (i_1, i_2, \dots, i_k) : m+1 \leq i_k \leq i_{k-1} \leq \dots \leq i_0; k \geq 1; i_0 = N\}$;

3) всі підхідні дроби ГЛД (1) належать колу

$$K = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{1}{2 \left(\Re(b_0) - \sum_{i_1=1}^N p_{i(1)} \right)} \right| \leq \frac{1}{2 \left(\Re(b_0) - \sum_{i_1=1}^N p_{i(1)} \right)} \right\}.$$

Зауваження 1. Умова $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in \mathcal{I}$, може бути опущена, бо якщо існує мультиіндекс $i(k)$ такий, що $a_{i(k)} = 0$, то відповідна гілка багатовимірного дроби обривається, неперервний дріб стає скінченим і ряди, в мультиіндекси елементів яких входить $i(k)$ до уваги не беруться.

1. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.

PARABOLIC CONVERGENCE DOMAIN OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF THE SPECIAL FORM

Using the sufficient criteria of convergence for branched continued fractions of the special form with positive elements, the elements and value set technique, the parabolic regions of convergence was established.